ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 16, вып. 6, 1972

МЕТОД ОБОБЩЕННОЙ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ В ТЕОРИИ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

С. Т. БЕЛЯЕВ, В. Г. ЗЕЛЕВИНСКИЙ

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

(Поступила в редакцию 22 июня 1972 г.)

Предложен метод рассмотрения коллективных ядерных возбуждений, связанный с обобщением обычных уравнений движения для матрицы плотности в приближении самосогласованного поля на задачи с сильной связью одночастичных и коллективных степеней свободы. Уравнения для матрицы плотности рассматриваются в расширенном пространстве, явно включающем коллективные возбуждения. Новым методом решены задачи о спаривании и о поступательном движении ядра. Развит операторный формализм, позволяющий на всех этапах вычислений следить за выполнением законов сохранения.

1. Введение

Теоретическое исследование низколежащих ядерных состояний коллективной природы сталкивается, как известно, с серьезными трудностями. Экспериментальные данные указывают, что разделение ядер на сферические и деформированные, с присущими каждому классу специфическими коллективными возбуждениями, является часто условным. Все больший интерес приобретают проблемы, связанные с «фазовыми переходами» в ядрах, т. е. с изменением свойств симметрии ядерного поля от ядра к ядру или по мере роста энергии возбуждения. Так, с увеличением момента I свойства состояний вращательных полос претерпевают заметное изменение [1]. По-видимому, требуется единое описание различных коллективных возбуждений с учетом их взаимосвязи и сильного влияния на самосогласованное поле в ядре.

Между тем существующие методы не дают такого единого описания. Несмотря на формальные различия, все эти методы (приближенное вторичное квантование, приближение хаотических фаз, метод двухчастичных функций Грина, приближение зависящего от времени самосогласованного поля и др.) по существу эквивалентны. Решая задачу о нахождении коллективных возбуждений этими методами (условно объединим их под названием «приближение хаотических фаз», ПХФ), мы фактически разбиваем эту задачу на два этапа.

Сначала строится основное состояние $|0\rangle$ системы, которое обычно находится в приближении Хартри — Фока — Боголюбова (Х. — Ф. — Б.) как вакуум по одночастичным возбуждениям — квазичастицам [1]. Среднее значение матрицы плотности $\langle 0|R|0\rangle \sim \langle 0|a^+a|0\rangle$ по этому основному состоянию определяет самосогласованное поле, действующее на нуклоны. При этом предполагается, что недиагональные матричные элементы $\langle 0|R|n\rangle$ между основным $|0\rangle$ и низколежащими коллективными состояниями $|n\rangle$ малы по сравнению с $\langle 0|R|0\rangle$, в то время как переходы в состояния неколлективной природы некогерентны и сильно гасятся (основная идея ПХФ).

Второй этап решения задачи состоит в линеаризации уравнений для недиагональных амплитуд $\langle 0|R|n\rangle$. Здесь считается, что одночастичная матрица плотности слабо меняется при коллективном возбуждении, т. е.

[1] Здесь и ниже мы имеем в виду четно-четные ядра.

величины $\langle n|R|n\rangle$ совпадают с ранее найденными $\langle 0|R|0\rangle$. Таким образом находим двухквазичастичные возбужденные состояния, в том числе и связанные состояния квазичастиц (фононы) — малые колебания самосогласованного поля.

Реально наблюдаются существенные эффекты взаимодействия квазичастиц с фононами [2] и фононной ангармоничности [3], описание которых требует выхода за рамки ПХФ.

С другой стороны, в ряде важных задач изложенный подход не может служить даже нулевым приближением. По существу, такая ситуация возникала уже при учете парных корреляций сверхпроводящего типа. Здесь мы должны обобщить метод Хартри — Фока, включая в рассмотрение кроме основного состояния данного ядра $|A; 0\rangle$ последовательность основных состояний соседних ядер $|A \pm 2; 0\rangle, \ldots$, между которыми велики матричные элементы $\langle A; 0|\Delta|A+2; 0\rangle$ оператора Δ куперовской пары нуклонов.

Требуемое обобщение состояло [4] в одновременном рассмотрении всей «полосы» состояний $|A; 0\rangle$ с разными A. Формально это можно выразить, удваивая размерность матрицы плотности, т. е. переходя к «спинорному» представлению типа

$$R \sim \begin{pmatrix} a^+a & \tilde{a}a \\ a^+\tilde{a}^+ & \tilde{a}\tilde{a}^+ \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где тильда относится к одночастичному состоянию $|\tilde{1}\rangle$, полученному из $|1\rangle$ отражением времени. Обычное решение БКШ фактически описывает усредненные по ряду ядер свойства основных состояний, принадлежащих полосе $|A; 0\rangle$.

Аналогичное положение возникает всегда, когда существует последовательность $|n\rangle$ коллективных состояний данного ядра или ряда ядер, отличающихся между собой лишь значениями некоторых квантовых чисел (число нуклонов A в задаче о спаривании) и связанных большими матричными элементами матрицы плотности (1). Такую последовательность состояний естественно называть полосой [5].

Одним из наиболее важных примеров служат, конечно, вращательные полосы, где состояния можно однозначно характеризовать полным моментом I и его проекцией M. Внутри вращательной полосы обычно велики матричные элементы квадрупольного момента Q, причем диагональные $\langle n|Q|n\rangle$ и разрешенные правилами отбора недиагональные $\langle n|Q|n'\rangle$ матричные элементы имеют одинаковый порядок величины, а переходы в состояния другой природы значительно менее вероятны. Здесь мы не можем ввести в качестве нулевого приближения картину независимых элементарных возбуждений («ротонов»). Необходимо сразу рассматривать всю полосу в целом.

Стандартный подход заключается в переходе в систему координат, связанную с деформированным самосогласованным полем («собственная система» обобщенной модели) с последующим внешним вращением этой системы. Такая модель принудительного вращения, рассматривающая вместо истинных состояний $|IM\rangle$ полосы состояния с определенной угловой скоростью Ω, носит явно квазиклассический характер и не учитывает ряда квантовых эффектов. Кроме того, принципиально различное нахождение колебаний и вращения лишает нас возможности единого описания коллективных возбуждений.

В работе [5] прямым решением операторных уравнений движения были найдены вращательные уровни как равноправная ветвь спектра коллективных возбуждений. Ниже будет развит подход, связанный с дальнейшим обобщением метода самосогласованого поля для задач, где существенно наличие полос ярко выраженных коллективных возбуждений [2)].

[2)] Краткое изложение идеи метода и некоторых результатов содержится в докладе [6].

2. Обобщенная матрица плотности

Предлагаемый метод может быть сформулирован как непосредственное обобщение обычного метода, зависящего от времени самосогласованного поля [7]. Это обобщение достигается тем, что самосогласованный гамильтониан S и матрица плотности R рассматриваются теперь как операторы, действующие не только на одночастичные переменные, но и в пространстве коллективных состояний полосы $|n\rangle$. Сходная идея выдвигалась в работах Клейна и Кермана [8], но не была последовательно проведена.

Введем в качестве базиса представления вторичного квантования полную систему однонуклонных состояний $|1)$ и определим парные операторы типа частица — дырка

$$B_{12} = a_2^+ a_1, \qquad B_{12}^+ = B_{21} \tag{2}$$

и типа частица — частица

$$A_{12} = a_{\tilde{2}} a_1, \quad A_{12}^+ = a_1^+ a_{\tilde{2}}^+, \tag{3}$$

а также «отраженные во времени» операторы

$$\tilde{B}_{12} \equiv B_{\tilde{2}\tilde{1}}, \quad \tilde{A}_{12} \equiv A_{\tilde{2}\tilde{1}} = A_{12}. \tag{4}$$

Все эти операторы действуют в пространстве истинных физических состояний $|n\rangle$ рассматриваемой полосы, которые являются стационарными состояниями полного гамильтониана

$$H = \sum_{12} \varepsilon_{21} B_{12} + \frac{1}{2} \sum_{1234} V(12;\,34)\, a_1^+ a_2^{\pm} a_3 a_4.$$

Согласно (1) определим матрицу плотности с учетом парных корреляций как

$$R_{12} = \begin{pmatrix} B_{12} & A_{12} \\ A_{21}^+ & \delta_{12} - \tilde{B}_{12} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В обычном приближении самосогласованного поля уравнения движения для матрицы плотности (6) имеют вид [7]

$$[H, R_{12}] = \sum_3 (R_{13} S_{32} - S_{13} R_{32}), \tag{7}$$

где самосогласованный гамильтониан S выражается матрицей

$$S_{12} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} & -\Delta_{12} \\ -\Delta_{21}^+ & -\tilde{\varepsilon}_{21} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\varepsilon_{11'} = \varepsilon_{11'} + \frac{1}{2} \sum_{22'} \{[V(21;\,1'2') - V(12;\,1'2')]B_{2'2} + \text{э.с.}\}, \tag{9}$$

$$\Delta_{11'} = -\sum_{22'} V(1\tilde{1}';\,\tilde{2}2') A_{2'2}. \tag{10}$$

При этом матрица плотности нормируется условием [4]

$$\sum_3 R_{13} R_{32} = R_{12}, \tag{11}$$

так что ее собственные значения равны нулю или единице (R есть проекционный оператор по отношению к состояниям, заполненным квазичастицами).

В правых частях формул (9), (10) подразумевается усреднение $\langle B_{2'2}\rangle$ и $\langle A_{2'2}\rangle$ по основному состоянию $|0\rangle$. Как обсуждалось во Введении, для задач, где существенно физическое влияние коллективных возбуждений, обычное ограничение основным состоянием недостаточно. Формально удобно ввести суммарное пространство состояний $|1; n\rangle$ как прямое произведение пространства одночастичных функций $|1\rangle$ («внутреннее» пространство) и пространства коллективных состояний $|n\rangle$ («внешнее» пространство). Операторы R, S и т. д., действующие в суммарном пространстве, определим их матричными элементами, например:

$$\left\langle 1; n\left|\begin{matrix} R \\ S \end{matrix}\right|2; n'\right\rangle \equiv \left\langle n\left|\begin{matrix} R_{12} \\ S_{12} \end{matrix}\right|n'\right\rangle . \tag{12}$$

Будем действовать далее в соответствии со стандартной процедурой метода самосогласованного поля. Коммутацией с гамильтонианом (5) найдем уравнения движения для оператора R (12) и произведем в них расцепление четверных произведений операторов на парные так же, как это делается в приближении Х.— Ф.— Б. При этом, однако, всюду парные операторы будем понимать в смысле суммарного пространства, прокладывая в их произведениях в качестве промежуточных состояний всеми состояниями $|n\rangle$ рассматриваемой полосы. Тогда мы придем к уравнениям, по форме аналогичным (7),

$$[R, H + S] = 0, \tag{13}$$

но имеющим более широкий смысл.

Входящие в S операторы ε и Δ определены с помощью матричных элементов (9), (10) согласно правилу (12), причем в правых частях (9), (10) подразумевается соответствующий матричный элемент $\langle n| \ldots |n'\rangle$ операторов B, A. Здесь и далее матричное умножение должно совершаться по всем индексам — внутренним, внешним и спинорным. Оператор H в (13) действует лишь на переменные внешнего пространства $|n\rangle$, являясь единичным оператором по внутренним и спинорным переменным.

Уравнение (13) для обобщенной матрицы плотности суммарного пространства является основным в предлагаемом подходе. Особенно простой вид оно приобретает в случае факторизованного взаимодействия [3], специально приспособленного к приближению самосогласованного поля. В этом случае имеем

$$V(12; 34) = -\sum_k \{\varkappa_k q^{(k)*}_{32} q^{(k)}_{14} + \varphi_k P^{(k)*}_{21} p^{(k)}_{31}\}, \tag{14}$$

$$H_{int} = -\frac{1}{2}\sum_k \varkappa_k Q^{\pm}_k Q_k - \frac{1}{2}\sum_k \varphi_k P^{+}_k P_k, \tag{14а}$$

где явно выделены каналы частица — частица и частица — дырка и введены «мультипольные» операторы

$$Q_k = \sum_{12} q^{(k)}_{21} B_{12}, \qquad P_k = \sum_{12} p^{(k)}_{21} A_{12}. \tag{15}$$

Последние, будучи операторами только во внешнем пространстве, могут быть записаны в виде следов (Sp) по внутренним переменным

$$Q_k = \mathrm{Sp}(q^{(k)}B), \quad P_k = \mathrm{Sp}(p^{(k)}A) \tag{16}$$

от парных операторов B, A и соответствующих одночастичных мультиполей $q^{(k)}$, $p^{(k)}$. Операторы (9), (10), входящие в состав самосогласованного поля,

[3] Подробный вывод уравнений для обобщенной матрицы плотности при факторизованном взаимодействии (14) изложен в работе [9].

принимают вид

$$\varepsilon = \varepsilon - \frac{1}{2}\sum_k \varkappa_k (q^{(k)} Q_k^+ + q^{(k)+} Q_k), \tag{17}$$

$$\Delta = \sum_k \varphi_k p^{(k)+} P_k. \tag{18}$$

Подчеркнем, что условия согласования (16), в отличие от обычного случая, не сводятся к нахождению численных значений параметров поля — теперь необходимо воспроизвести операторную структуру обеих частей (16) во внешнем пространстве.

В общем случае произвольного взаимодействия $V(12; 34)$ связь (9), (10) самосогласованного гамильтониана (8) и матрицы плотности (6) также можно записать [7] с помощью следов (Tr) как по внутренним (Sp), так и по спинорным переменным:

$$S = \hat{\varepsilon} + \tilde{S}\{R\}, \quad \tilde{S}_1\{R\} = \mathrm{Tr}_2(\hat{V}_{12} R_2). \tag{19}$$

В этой формуле $\hat{V}_{12}$ означает взаимодействие между частицами 1 и 2, записанное согласно (9), (10) в спинорном виде.

Ясно, что уравнение (13) удовлетворяется, если выбрать в качестве R любую функцию оператора $(H + S)$. Принцип Паули ограничивает допустимые собственные значения матрицы плотности R интервалом от нуля до единицы. Оставаясь в рамках идеологии самосогласованного поля, наложим на решение уравнения (13) условие нормировки

$$R^2 = R, \tag{20}$$

которое является прямым обобщением (11) и явно совместимо с уравнением (13). Поскольку нормировка (20) справедлива лишь в суммарном пространстве, она учитывает «рассасывание» одночастичной силы из-за примеси коллективных возбуждений. Различные решения, остающиеся даже при наложении условия (20), отвечают различным физическим полосам.

Таким образом, имеем сложную систему уравнений (13), (20) для обобщенной матрицы плотности совместно с условиями согласования (19). Общие физические соображения и экспериментальные факты определяют ту совокупность коллективных состояний, которая должна явно учитываться. При этом, как мы увидим на конкретных примерах, важную роль играют свойства симметрии полосы, т. е. групповые операции, генераторы которых являются точными интегралами движения, различающими состояния полосы. Внутри полосы энергия $E_n = \langle n|H|n\rangle$ зависит лишь от этих коллективных характеристик. Поэтому после нахождения матрицы плотности R и согласования ядерного поля S вычисление операторов, являющихся генераторами соответствующей группы, дает энергетический спектр E_n.

В работе [5] задача о ротационной полосе решалась нами непосредственным отысканием матричных элементов R, удовлетворяющих (13), (20). Ниже покажем, что в силу свойств симметрии в ряде случаев можно совершить точное преобразование [6], аналогичное по смыслу переходу в собственную систему ядра, после чего решение значительно упрощается. Отметим, что в отличие от работ [8] для изучения четно-четных ядер не потребуется никаких предположений о спектрах соседних нечетных.

3. Преобразование операторов и учет законов сохранения

Физически выделенные состояния полосы, образующие наше внешнее пространство, описываются малым числом коллективных степеней свободы.

В ряде случаев уже знания классификации внешних состояний по точным квантовым числам достаточно для нахождения правильной операторной структуры матрицы плотности.

Пусть, например, известен точный аддитивный интеграл движения

$$\Theta = \sum_a \theta_a \tag{21}$$

(сумма — по всем частицам). Сохранение Θ означает, что для матричных элементов взаимодействия $V(21;\ 1'2')$ в базисе собственных функций $|1)$ одночастичного оператора θ справедливо правило отбора

$$\theta_2 + \theta_1 = \theta_{1'} + \theta_{2'}, \tag{22}$$

а для кинетической энергии ε_{12} имеем $\theta_1 = \theta_2$. Если точные состояния $|n\rangle$ имеют определенные значения Θ_n сохраняющегося оператора (21), то из формул (2) и (9) видно, что самосогласованная часть оператора ε состоит из слагаемых, имеющих правила отбора $\Delta\Theta = \theta_2 - \theta_{2'}$. Рассматривая ε как оператор (12) в суммарном пространстве, видим, что по внутренним переменным матричный элемент $\varepsilon_{11'}$ имеет правила отбора $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_{1'}$. В силу (22) получаем $\Delta\Theta + \Delta\theta = 0$. Это справедливо и для потенциала спаривания (10) при условии $\theta_1 = -\theta_{1'}$.

Таким образом, для самосогласованного гамильтониана (8) в суммарном пространстве величина $\Theta + \theta$ является интегралом движения, т. е.

$$[S,\ \Theta + \theta] = 0. \tag{23}$$

Смысл равенства (23) становится особенно ясным, если оператор θ является генератором некоторых «сдвигов» одночастичных переменных. Тогда (23) означает, что при одновременном сдвиге частицы и самосогласованного поля свойства системы не меняются. Типичным примером служат операторы полного импульса $\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a$ и полного момента системы $\mathbf{J} = \sum_a \mathbf{j}_a$.

Чтобы продемонстрировать, как можно воспользоваться наличием закона сохранения (23), рассмотрим параллельно две задачи — спаривание и поступательное движение ядра. В первом случае (I) интересующая нас полоса состоит из основных состояний $|N\rangle$ последовательных четных ядер; во второй задаче (II) нужно учесть совокупность состояний $|\mathbf{P}\rangle$ с разными значениями полного импульса ядра.

Введем координаты фазы Φ и центра масс $\mathbf{X}$, канонически сопряженные операторам N и $\mathbf{P}$:

$$\begin{array}{cc} \text{(I)} & \text{(II)} \\ \Phi;\ N = -i\dfrac{\partial}{\partial\Phi}; & \mathbf{X};\ \mathbf{P} = -i\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{X}}. \end{array} \tag{24}$$

Здесь операторы N и $\mathbf{P}$ определены своими матричными элементами в ограниченном пространстве полосы:

$$\langle N_1|N|N_2\rangle = N_1\delta(N_1 - N_2);\ \langle \mathbf{P}_1|\mathbf{P}|\mathbf{P}_2\rangle = \mathbf{P}_1\delta(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2). \tag{25}$$

Из-за наличия спаривания самосогласованный гамильтониан (8) не сохраняет числа частиц. Действительно, ε не меняет числа частиц, а $\Delta(\Delta^+)$ дает $\Delta N = -2(+2)$:

$$[S, N] = 2\begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta^+ & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

С другой стороны (τ^i — матрицы Паули),

$$[S, \tau^3] = -2\begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta^+ & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Из (26) и (27) видно, что для числа частиц роль соответствующего одночастичного оператора θ в (4) играет матрица τ^3. Таким образом, законы сохранения (23) для рассматриваемых задач имеют вид

$$[S, N + \tau^3] = 0; \quad [S, \mathbf{P} + \mathbf{p}] = 0. \tag{28}$$

В случае (II) фактически выполнены три независимых закона сохранения для коммутирующих компонент $\mathbf{P}$.

Заметим, что существуют такие унитарные преобразования D внутреннего пространства, зависящие от внешних координат (24), которые удовлетворяют условиям

$$D(N + \tau^3)D^{-1} = N; \quad D(\mathbf{P} + \mathbf{p})D^{-1} = \mathbf{P}. \tag{29}$$

В качестве конкретной реализации этих преобразований можно выбрать:

$$D(\Phi) = e^{i\Phi\tau^3}; \quad D(\mathbf{X}) = e^{i\mathbf{X}\mathbf{p}}. \tag{30}$$

Подвергнув D-преобразованию уравнения (13), (14), получим

$$[s + h, r] = 0, \quad r^2 = r, \tag{31}$$

где введены преобразованные операторы

$$s = DSD^{-1}, \quad r = DRD^{-1}, \quad h = DHD^{-1}. \tag{32}$$

Из (28) и (29) находим

$$[s, N] = 0; \quad [s, \mathbf{P}] = 0. \tag{33}$$

Это означает, что преобразованное самосогласованное поле s не зависит от фазы Φ и координат $\mathbf{X}$ центра масс. С другой стороны, коллективный гамильтониан H раньше был функцией только точных интегралов движения в полосе:

$$H = H(N); \quad H = H(\mathbf{P}). \tag{34}$$

После преобразования (32) здесь появляется зависимость от внутренних операторов

$$h = H(DND^{-1}) = H(N - \tau^3); \quad h = H(D\mathbf{P}D^{-1}) = H(\mathbf{P} - \mathbf{p}). \tag{35}$$

В силу соотношений (33) и (35) матрица плотности r, удовлетворяющая уравнениям (31), зависит от внешних переменных лишь через N или $\mathbf{P}$, т. е. не содержит координат Φ и $\mathbf{X}$. Следовательно, в преобразованных уравнениях внешние операторы играют роль параметров (N и $\mathbf{P}$ строго сохраняются, так что можно фиксировать их значения). Это обстоятельство существенно упрощает дальнейшее решение, так как в (31) следует коммутировать только функции внутренних (и спинорных) переменных.

4. Задача о спаривании

Фактический вид преобразованного гамильтониана h (35) оказывается здесь очень простым. Для любой функции $H(N)$ в силу свойств матриц Паули имеем

$$h = H(N - \tau^3) \equiv h_0(N) - \tau^3\lambda(N), \tag{36}$$

где введены две функции N, играющие роль средней энергии соседних ядер и химического потенциала:

$$h_0(N) = {}^1/_2\{H(N + 1) + H(N - 1)\}, \tag{37}$$

$$\lambda(N) = {}^1/_2\{H(N+1) - H(N-1)\}. \tag{38}$$

Член $h_0(N)$ вообще выпадает из уравнений (31), так как коммутирует с r. Химический потенциал $\lambda(N)$ фактически (см. (42)) меняет уровень отсчета энергий в операторе (8), который преобразуется согласно

$$S = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\Delta \\ -\Delta^+ & -\tilde{\varepsilon} \end{pmatrix} \to s = e^{i\Phi\tau^3} \begin{pmatrix} \varepsilon & -\Delta \\ -\Delta^+ & -\tilde{\varepsilon} \end{pmatrix} e^{-i\Phi\tau^3} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\bar{\Delta} \\ -\bar{\Delta}^+ & -\tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Здесь введены диагональные в N-представлении величины

$$\bar{\Delta} = e^{i\Phi}\Delta e^{i\Phi}, \quad \bar{\Delta}^+ = e^{-i\Phi}\Delta^+ e^{-i\Phi}, \tag{40}$$

которые по доказанному (33) на самом деле не зависят от фазы Ф.

Рассмотрим простой случай, когда магнитные поля отсутствуют $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$, спаривание (14а) имеет простейший вид $\varphi_k = G\delta_{k0}$, $p^{(0)}_{21} = \delta_{21}$ и величины $\bar{\Delta}$ и $\bar{\Delta}^+$ можно считать вещественными, а следовательно, равными между собой. В этом случае

$$s = \varepsilon\tau^3 - \Delta\tau^1. \tag{41}$$

В силу (36) и (41) уравнение (31) сводится к

$$[s', r] = 0, \qquad s' = s - \tau^3\lambda = \begin{pmatrix} \varepsilon - \lambda & -\bar{\Delta} \\ -\bar{\Delta} & -\varepsilon + \lambda \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Уравнение (42) по форме совпадает с обычными уравнениями приближения Х.— Ф.— Б. Удовлетворяющее квазичастичной нормировке $r^2 = r$ решение имеет вид

$$r = \sum_\nu |\nu) r_\nu (\nu|. \tag{43}$$

Здесь $|\nu)$ — собственные функции оператора ε с энергиями ε_ν, а матрица r_ν дается стандартным выражением

$$r_\nu = \begin{pmatrix} v_\nu^2 & -u_\nu v_\nu \\ -u_\nu v_\nu & u_\nu^2 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

где боголюбовские коэффициенты определены равенствами

$$u_\nu^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{E_\nu}\right), \qquad v_\nu^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{E_\nu}\right), \qquad E_\nu = \sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \bar{\Delta}^2}. \tag{45}$$

Все эти величины зависят от числа частиц N как от параметра.

Исходная матрица плотности $R = D^{-1}rD$ получается из (43) обратным к (30) преобразованием:

$$R_\nu = e^{-i\Phi\tau^3} r_\nu e^{i\Phi\tau^3} = \begin{pmatrix} v_\nu^2(N+1) & -e^{-i\Phi}u_\nu(N)v_\nu(N)e^{-i\Phi} \\ -e^{i\Phi}u_\nu(N)v_\nu(N)e^{i\Phi} & u_\nu^2(N-1) \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где использовано представление $\Phi = i\frac{\partial}{\partial N}$ оператора фазы. Условие согласования (19) дает в рассматриваемом случае постоянного спаривания

$$\Delta = e^{-i\Phi}\bar{\Delta}e^{-i\Phi} = -G\,\mathrm{Tr}\left(\frac{\tau^1 - i\tau^2}{2}R\right). \tag{47}$$

Подстановка R_ν из (46) в (47) дает для величины $\bar{\Delta}$ обычное уравнение

$$\bar{\Delta} = G \sum_\nu \frac{\bar{\Delta}}{2E_\nu}. \tag{48}$$

Наконец, для завершения решения необходимо найти спектр коллективных состояний $|N\rangle$ полосы. Микроскопический оператор полного числа частиц

$$N = \sum_1 B_{11} = \mathrm{Sp}(B) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{(1+\tau^3)R\} \tag{49}$$

должен иметь на состояниях $|N\rangle$ те же собственные значения N, которые входят параметрами в правую часть (49). Используя явный вид (46), находим

$$N = \sum_\nu v_\nu^2 (N+1). \tag{50}$$

Уравнение (50) практически совпадает с обычным, кроме сдвига аргумента v_ν^2 на единицу. В реальных задачах это изменение не играет роли (оно лежит за пределами точности метода БКШ). Однако в точно решаемой модели вырожденного уровня именно этот сдвиг обеспечивает совпадение (50) с точным решением (см., например, [10]).

Физический интерес представляет систематическое изменение от ядра к ядру энергий отделения двух нуклонов [11]. В предлагаемом методе оно находится очень просто. Считая $H(N)$ плавной функцией, можно провести разложение вблизи некоторого значения $N = N_0$, которому отвечает $\lambda(N_0) = \lambda_0$. Это разложение, как следует из (37) и (38), имеет вид

$$\lambda(N) = \lambda_0 + \frac{1}{\mathcal{F}}(N-N_0) + O(N-N_0)^2, \tag{51}$$

$$H(N) = H(N_0) + \lambda_0(N-N_0) + \frac{1}{2\mathcal{F}}(N-N_0)^2 + O(N-N_0)^3, \tag{52}$$

где квадратичный член в (52) описывает «парные вращения». Неизвестный «момент инерции» $\mathcal{F}$ получается согласно (51) вариацией равенства (50) по λ. Учитывая условие (48), легко найдем (при $\bar{\Delta} \neq 0$)

$$\mathcal{F} = \bar{\Delta}^2 \sum_\nu \frac{1}{2E_\nu^3} + \left(\sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{2E_\nu^3}\right)^2 \Big/ \sum_\nu \frac{1}{2E_\nu^3}, \tag{53}$$

что совпадает с известным результатом [4], полученным, например, с помощью ПХФ [12], методом принудительного вращения [13] или прямым решением [14] уравнений движения, аналогично решению задачи об обычном вращении [5].

5. Задача о движении центра масс

Исходное двухчастичное взаимодействие (5) сохраняет полный импульс пары:

$$[V_{12}, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2] = 0. \tag{54}$$

Кроме того, в силу галилеевской инвариантности взаимодействие может зависеть лишь от относительного импульса частиц $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, и поэтому V_{12}

[4] Ясно, что энергия парных вращений очень мала. Так, в модели вырожденного уровня с числом состояний 2Ω энергия одночастичных возбуждений $E = G\Omega$, а $(\mathcal{F}E)^{-1} = \Omega^{-1} \ll 1$. Однако эти малые члены в (51) могут быть строго выделены по своей операторной зависимости от N.

коммутирует с координатой центра масс пары

$$[V_{12},\ \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2] = 0 \tag{55}$$

или, в спинорной записи (19),

$$[\hat{V}_{12},\ (\mathbf{x}\tau^3)_1 + (\mathbf{x}\tau^3)_2] = 0. \tag{55а}$$

Равенство (55а) является частным случаем более общей градиентной инвариантности, следствия которой для задачи о коллективных ядерных возбуждениях обсуждались в работе [15].

В соответствии с результатами раздела 3 сохранение полного импульса ядра $\mathbf{P}$ приводит после D-преобразования (30) к уравнениям для обобщенной матрицы плотности

$$[H(\mathbf{P}-\mathbf{p}) + s(\mathbf{P}),\ r(\mathbf{P})] = 0, \quad r^2(\mathbf{P}) = r(\mathbf{P}). \tag{56}$$

Здесь все операторы не зависят от координат $\mathbf{X}$ центра масс ядра, а сохраняющийся вектор $\mathbf{P}$ является параметром.

Спектр состояний полосы будем искать в виде

$$H(\mathbf{P}) = \frac{\mathbf{P}^2}{2M}, \tag{57}$$

где массовый коэффициент M подлежит определению. Равенство этого параметра сумме масс нуклонов должно получаться в результате решения и может служить проверкой согласованности метода [5)].

Поскольку старший по $\mathbf{P}$ член преобразованного гамильтониана $H(\mathbf{P}-\mathbf{p})$ коммутирует с $r(\mathbf{P})$, уравнение (56) после подстановки (57) принимает вид

$$\left[s - \frac{1}{M}\mathbf{P}\mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}^2}{2M}, r\right] = 0. \tag{58}$$

В простейшем случае, когда самосогласованный гамильтониан s отвечает обычной модели оболочек, уравнение (58) решается до конца и дает точный результат $M = mA$. Это решение приведено в Приложении. В общем случае произвольного поля s, включающего спаривание, будем рассматривать члены, содержащие в знаменателе большую массу M, как возмущение.

В нулевом порядке величины $\overset{\circ}{s}$ и $\overset{\circ}{r}$ не зависят от $\mathbf{P}$ и удовлетворяют уравнениям

$$[\overset{\circ}{s},\ \overset{\circ}{r}] \equiv [\varepsilon + \tilde{s}\{\overset{\circ}{r}\},\ \overset{\circ}{r}] = 0, \quad \overset{\circ}{r}{}^2 = \overset{\circ}{r}; \tag{59}$$

это — статическое решение для «остановленного» ядра.

В первом порядке по M^{-1} матрица плотности получает приращение $\delta r(\mathbf{P})$; соответственно согласованная часть $\tilde{s}$ (19) меняется на $\delta s = \tilde{s}\{\delta r\}$:

$$[\overset{\circ}{s},\ \delta r] + [\tilde{s}\{\delta r\}, \overset{\circ}{r}] = \left[\frac{\mathbf{P}\mathbf{p}}{M} - \frac{\mathbf{p}^2}{2M}, \overset{\circ}{r}\right]. \tag{60}$$

Представим добавку к матрице плотности в виде

$$\delta r(\mathbf{P}) = (\mathbf{P}-\mathbf{p})\,\delta\mathbf{r} + \overline{\delta r}, \tag{61}$$

где величины $\delta\mathbf{r}$ и $\overline{\delta r}$ зависят только от внутренних переменных. Поскольку возмущение δs линейно по δr, то, собирая коэффициенты при опера-

---

[5)] Известно, например, что простейший вариант проекционного метода [16] не дает правильного значения массы системы; последнее может быть получено лишь при более сложном подходе [17].

торе **P**, получаем

$$[\dot{\varepsilon}+\tilde{s}\{\mathring{r}\},\ \delta\mathbf{r}]+[\tilde{s}\{\delta\mathbf{r}\},\mathring{r}]=\left[\frac{\mathbf{p}}{M},\mathring{r}\right]. \tag{62}$$

Аналогичное уравнение легко получить для скалярной части $\overline{\delta r}$.

Галилеевская инвариантность взаимодействия (55) позволяет найти точное решение уравнения (62). Будем искать его в виде

$$\delta\mathbf{r}=[\mathbf{\Lambda},\mathring{r}], \tag{63}$$

что отвечает малому преобразованию, генерируемому оператором $\mathbf{\Lambda}$. Подставляя (63), преобразуем первый член (62):

$$[\varepsilon+\tilde{s}\{\mathring{r}\},\ \delta\mathbf{r}]=[[\varepsilon+\tilde{s}\{\mathring{r}\},\ \mathbf{\Lambda}],\ \mathring{r}]. \tag{64}$$

Здесь мы воспользовались уравнением нулевого порядка (59). Вследствие (64) члены уравнения (62), зависящие от взаимодействия, можно объединить в

$$[\tilde{s}\{[\mathbf{\Lambda},\mathring{r}]\}+[\tilde{s}\{\mathring{r}\},\mathbf{\Lambda}],\mathring{r}]. \tag{65}$$

Однако в силу требования самосогласованности (19) [6]

$$(\tilde{s}\{[\mathbf{\Lambda},\mathring{r}]\}+[\tilde{s}\{\mathring{r}\},\mathbf{\Lambda}])_1=\mathrm{Tr}_2\{[\hat{V}_{12},\mathbf{\Lambda}_1+\mathbf{\Lambda}_2](\mathring{r})_2\}. \tag{66}$$

Поэтому выражение (65) тождественно обращается в нуль если взаимодействие $\hat{V}_{12}$ инвариантно относительно преобразования, генерируемого оператором $\mathbf{\Lambda}$. Тогда уравнение (62) оказывается эквивалентным

$$[[\varepsilon,\mathbf{\Lambda}],\mathring{r}]=\left[\frac{\mathbf{p}}{M},\mathring{r}\right]. \tag{67}$$

Учтя, что в отсутствие внешних полей $\hat{\varepsilon}=(\mathbf{p}^2/2m)\tau^3$, и положив

$$\mathbf{\Lambda}=i\frac{m}{M}\mathbf{x}\tau^3, \tag{68}$$

мы удовлетворим как уравнению (67), так и, вследствие галилеевской инвариантности (55а), условию обращения в нуль выражения (66).

Для проверки постулированного коллективного спектра (57) и определения параметра M используем условие операторного согласования полного импульса (см. (6), (16))

$$\mathbf{P}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{(1+\tau^3)\mathbf{p}R\}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{(1+\tau^3)\mathbf{p}D^{-1}rD\}. \tag{69}$$

Очевидно, что нулевой порядок $\mathring{r}$ (59) не дает вклада в (69) из-за отсутствия в статическом решении выделенных направлений. Векторная часть возмущения $\delta\mathbf{r}$ (61) дает в силу (29)

$$\mathbf{P}=\mathrm{Tr}\left\{\frac{1+\tau^3}{2}\mathbf{p}D^{-1}(P_k-p_k)\,\delta r_k D\right\}=P_k\,\mathrm{Tr}\left\{\frac{1+\tau^3}{2}\mathbf{p}D^{-1}\delta r_k D\right\}=$$

$$=P_k\,\mathrm{Tr}\left\{\frac{1+\tau^3}{2}\mathbf{p}\delta r_k\right\}. \tag{70}$$

Подставляя сюда найденное решение из (63), (68), получаем

$$\mathbf{P}=\frac{im}{M}P_k\,\mathrm{Tr}\left\{\frac{1+\tau^3}{2}\mathbf{p}[x_k\tau^3,\mathring{r}]\right\}=\frac{m}{M}\mathbf{P}\,\mathrm{Tr}\left\{\frac{1+\tau^3}{2}\hat{\mathbf{e}}\right\}. \tag{71}$$

[6] Легко видеть, что вследствие сохранения импульса (54) вид условия согласования (19) здесь не меняется при D-преобразовании (30): $\tilde{s}_1=D_1\mathrm{Tr}_2(\hat{V}_{12}R_2)D_1^{-1}=$ $=\mathrm{Tr}_2(D_2^{-1}D_2D_1\hat{V}_{12}D_1^{-1}D_2^{-1}D_2R_2)=\mathrm{Tr}_2(D_2^{-1}\hat{V}_{12}D_2R_2)=\mathrm{Tr}_2(\hat{V}_{12}D_2R_2D_2^{-1})=\mathrm{Tr}(\hat{V}_{12}r_2)$, если, как в (66), матрица R, входящая в аргумент $\tilde{s}$, не зависит от внешних операторов.

Таким образом, операторная зависимость от импульса $\mathbf{P}$ воспроизводится правильно, а для совпадения коэффициентов следует выбрать M равным (см. (49))

$$M = m\,\mathrm{Tr}\left\{\frac{1+\tau^3}{2}\overset{\circ}{r}\right\} = m\,\mathrm{Tr}\left\{\frac{1+\tau^3}{2}\overset{\circ}{R}\right\} = mA, \tag{72}$$

что и следовало ожидать.

6. Заключение

В предыдущих разделах было показано, как метод матрицы плотности может быть обобщен с целью рассмотрения задач, где существенна связь одночастичных характеристик с коллективными возбуждениями. При этом обобщении мы старались держаться по возможности близко к обычному подходу, связанному с введением единого, не зависящего от коллективных возбуждений самосогласованного поля и квазичастиц.

В качестве простейших приложений метода были подробно рассмотрены задачи о спектре основных состояний при наличии парных корреляций и о трансляционном движении ядра. Простота этих задач обусловлена наличием аддитивных интегралов движения, что приводит к важным свойствам симметрии самосогласованного поля и матрицы плотности. Отметим, что идейная сторона метода здесь тесно связана с теоремой Голдстоуна [18]. Использованное в решении D-преобразование (30) исключает несохраняющиеся степени свободы «внешней» системы. При этом самосогласованное поле имеет по внутренним переменным симметрию, меньшую, чем исходный гамильтониан. Однако в предлагаемом методе самосогласованное поле является еще и оператором по коллективным переменным. Строгий учет соответствующей («голдстоуновской») ветви спектра коллективных возбуждений восстанавливает нарушенную симметрию и дает выполнение законов сохранения на каждом этапе вычислений.

Уже в этих простейших задачах открывается возможность получения результатов, выходящих за рамки стандартных приближений. Так удается проследить зависимость от N в задаче о спаривании и правильно выделить движение центра масс в модели оболочек с произвольным потенциалом. При этом поправки хотя и составляют малую величину от полной энергии ядра, но представляют собой когерентные вклады, отличимые по своей операторной структуре в коллективном пространстве.

Отметим в заключение, что в квантовых задачах многих тел часто возникает проблема выделения коллективных переменных. При этом в ряде методов такое выделение заставляет накладывать соответствующие дополнительные условия, отвечающие сохранению числа степеней свободы системы. В развитом выше аппарате коллективные переменные вводятся в задачу сверх одночастичных, так что проблема дополнительных условий в обычном смысле вообще не возникает. Вместо этого требуется наряду с нахождением самосогласованного поля выполнить условия согласования этих коллективных переменных, что и определяет коллективный спектр системы.

Разработанный метод с успехом может быть применен к наиболее важной практически задаче о ротационных спектрах. Этому будет посвящена отдельная работа (некоторые предварительные результаты опубликованы в работах [6, 9, 19]).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выделение движения центра масс в модели оболочек

Пусть преобразованный с помощью (30) самосогласованный гамильтониан s состоит из кинетической энергии и оболочечного потенциала, зависящего от координат нуклона:

$$s = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{x}). \tag{П.1}$$

Тогда матрица плотности удовлетворяет уравнению (58)

$$\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \mathbf{pv} + U(\mathbf{x}), r\right] = 0, \tag{П.2}$$

где введены приведенная масса $\mu = (m^{-1} + M^{-1})^{-1}$ и скорость движения центра масс $\mathbf{v} = \mathbf{P}/M$ (напомним, что коллективный импульс $\mathbf{P}$ является здесь фиксированным параметром).

Задача сводится к нахождению полной системы одночастичных функций ψ_ν, удовлетворяющих уравнению

$$\left\{\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \mathbf{pv} + U(\mathbf{x})\right\}\psi_\nu = \varepsilon_\nu\psi_\nu. \tag{П.3}$$

Градиентное преобразование

$$\psi_\nu = e^{i\mu\mathbf{vx}}\varphi_\nu \tag{П.4}$$

означает учет сдвига всего импульсного распределения нуклонов на величину переносного импульса $\mu\mathbf{v}$. Новые функции φ_ν подчиняются уравнению

$$\left\{\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + U(\mathbf{x})\right\}\varphi_\nu = \left(\varepsilon_\nu + \frac{\mu\mathbf{v}^2}{2}\right)\varphi_\nu \tag{П.5}$$

и представляют собой стационарные состояния дискретного спектра с нулевым средним значением $(\varphi_\nu|\mathbf{p}|\varphi_\nu)$, в то время как $(\psi_\nu|\mathbf{p}|\psi_\nu) = \mu\mathbf{v}$.

Таким образом, матрица плотности r, являющаяся решением уравнения (П.2), может быть записана в виде

$$r = \sum_\nu e^{i\mu\mathbf{vx}}|\varphi_\nu)n_\nu(\varphi_\nu|e^{-i\mu\mathbf{vx}}, \tag{П.6}$$

где n_ν — оболочечные числа заполнения состояний (П.5). При малых $\mathbf{v}$ решение (П.6) совпадает с найденным в разделе 5 (см. (63), (68)) для общего самосогласованного гамильтониана s.

Для нахождения коллективного спектра вернемся к исходной матрице плотности (см. (32))

$$R = \exp(-i\mathbf{pX})\exp\left(i\frac{\mu}{M}\mathbf{Px}\right)\sum_\nu |\varphi_\nu)n_\nu(\varphi_\nu|\exp\left(-i\frac{\mu}{M}\mathbf{Px}\right)\exp(i\mathbf{pX}) \tag{П.7}$$

и вычислим полное число частиц и полный импульс

$$A = \mathrm{Sp}\,R, \qquad \mathbf{P} = \mathrm{Sp}(\mathbf{p}R). \tag{П.8}$$

Вычисления удобно провести, взяв одночастичные функции в импульсном представлении $\varphi_\nu(\mathbf{p})$. Используя свойства экспонент в (П.7) как операторов сдвигов, легко получить

$$A = \sum_\nu n_\nu \int d\mathbf{p}\left|\varphi_\nu\left(\mathbf{p} - \frac{\mu}{M}\mathbf{p} - \frac{\mu}{M}\mathbf{P}\right)\right|^2, \tag{П.9}$$

$$\mathbf{P} = \sum_\nu n_\nu \int d\mathbf{p}\mathbf{p}\left|\varphi_\nu\left(\mathbf{p} - \frac{\mu}{M}\mathbf{p} - \frac{\mu}{M}\mathbf{P}\right)\right|^2. \tag{П.10}$$

В равенстве (П.9) после замены переменных интегрирования зависимость от $\mathbf{P}$ пропадает, так что

$$A = \sum_\nu n_\nu \int d\mathbf{p}\left|\varphi_\nu\left(\mathbf{p} - \frac{\mu}{M}\mathbf{p}\right)\right|^2. \tag{П.11}$$

Производя такую же замену в равенстве (П.10), используя обращение в нуль $(\varphi_\nu|\mathbf{p}|\varphi_\nu)$ и учитывая, что

$$\left(\frac{\mu}{M}\right)\Big/\left(1-\frac{\mu}{M}\right)=\frac{m}{M},$$

найдем

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}\frac{m}{M}\sum_\nu n_\nu\int d\mathbf{p}\left|\varphi_\nu\left(\mathbf{p}-\frac{\mu}{M}\mathbf{p}\right)\right|^2=\mathbf{P}\frac{m}{M}A, \qquad (\text{П.12})$$

что доказывает соотношение (72).

Таким образом, можно точно рассмотреть движение центра масс при любом (не только осцилляторном) виде оболочечного потенциала, если корректно учесть отдачу в нуклонных волновых функциях (см. (П.9) — (П.11)).

Литература

[1] M. A. J. Mariscotti, G. Scharff-Goldhaber, B. Buck. Phys. Rev., **178**, 1864, 1969.
[2] С. Т. Беляев, В. Г. Зелевинский. ЯФ, **1**, 13, 1965.
[3] S. T. Belyaev, V. G. Zelevinsky. Nucl. Phys., **39**, 582, 1962.
[4] Н. Н. Боголюбов. УФН, **67**, 549, 1969.
[5] С. Т. Беляев, В. Г. Зелевинский. ЯФ, **11**, 741, 1970.
[6] С. Т. Беляев. В кн. Проблемы современной ядерной физики, «Наука», 1971, стр. 129.
[7] S. T. Belyaev. Nucl. Phys., **64**, 17, 1965.
[8] A. Klein, A. Kerman. Phys. Rev., **132**, 1326, 1963; **138B**, 1323, 1965.
[9] В. Г. Зелевинский. В кн. Материалы VII школы физики ЛИЯФ, ЛФТИ АН СССР, 1972, ч. 2, стр. 147.
[10] A. K. Kerman. Ann. Phys., **12**, 300, 1961.
[11] S. Whineray, J. D. Macdougall, W. McLatchie, H. E. Duckworth. Nucl. Phys., **A151**, 377, 1970.
[12] С. К. Абдулвагабова, Н. И. Пятов. Препринт Р4-5576, ОИЯИ, 1971.
[13] R. Beck, M. Kleber, H. Schmidt. Zs. Phys., **250**, 155, 1972.
[14] Р. В. Джолос, В. Рыбарска. Препринт Р4-6258, ОИЯИ, 1972.
[15] С. Т. Беляев. ЯФ, **4**, 936, 1966; Phys. Lett., **28B**, 365, 1969.
[16] R. E. Peierls, J. Yoccoz. Proc. Soc., **A70**, 381, 1957.
[17] R. E. Peierls, D. J. Thouless. Nucl. Phys., **38**, 154, 1962.
[18] H. Stern. Phys. Rev., **147**, 94, 1966.
[19] В. Г. Зелевинский, М. И. Штокман. Изв. АН СССР, серия физ., **36**, № 11, 1972.

METHOD OF GENERALIZED DENSITY MATRIX IN COLLECTIVE EXCITATION THEORY

S. T. BELYAEV, V. G. ZELEVINSKY

Here we propose a method to consider collective nuclear excitations connected with generalization of usual equations of motion for density matrix in selfconsistent field approximation for the problems with strong coupling of single-particle and collective degrees of freedom. Equations for density matrix are being considered in expanded space, that explicitly includes collective excitations. The new method was used in solving the problem on pairing and on translational motion of nucleus. Operator formalism, that allows one to follow the fulfilment of conservation laws at all the stages of calculation has been developed.