Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 42 *1962* *Вып. 6*

«АНГАРМОНИЧЕСКИЕ» ЭФФЕКТЫ КВАДРУПОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКИХ ЯДЕР

С. Т. Беляев, В. Г. Зелевинский

В рамках микроскопической теории коллективных возбуждений сферических четно-четных ядер рассматриваются отклонения от основного гармонического приближения. Показано, что в первом приближении по параметру адиабатичности «ангармонические» поправки выражаются через один параметр. В этом приближении найдены изменения волновых функций, сдвиги энергетических уровней и вероятности $E2$-переходов для первых двух возбужденных состояний. Рассмотрены также поправки второго приближения, которые могут быть выражены также через один параметр.

1. Введение

Нижние возбужденные состояния четно-четных сферических ядер [1] обладают определенными коллективными свойствами, которые в первом приближении могут быть описаны моделью квадрупольных колебаний [1]. Первое возбужденное состояние, согласно этой простой модели, имеет спин и четность 2^+. Второе возбужденное состояние, имеющее удвоенную энергию, состоит из триплета 0^+, 2^+, 4^+. При этом $E2$-переход из второго состояния в основное $(2_2 \to 0)$ запрещен, а переход $(2_2 \to 2_1)$ вдвое интенсивнее, чем $(2_1 \to 0)$.

Свойства возбужденных состояний реальных ядер заметно отклоняются от этих простых закономерностей. Естественно предположение, что эти отклонения можно описать путем введения ангармонических поправок в модель квадрупольных колебаний. Однако подобные расчеты до сих пор не были проведены, так как чисто феноменологическое рассмотрение ангармонических поправок связано с введением большого числа свободных параметров и поэтому не является удовлетворительным. В подобной ситуации естественным является микроскопический подход, при котором параметры возбуждений возникают как результат теоретических расчетов.

Как было установлено одним из авторов [2], природа колебаний сферических ядер существенно отличается от гидродинамической. В основном в колебаниях участвуют нуклоны поверх остова. Возникающая при этом поляризация остова приводит лишь к перенормировке взаимодействия наружных нуклонов. Это обстоятельство позволяет ограничиться рассмотрением лишь нуклонов в верхней незаполненной оболочке, что значительно упрощает задачу. С микроскопической точки зрения «фонон» этих колебаний представляет собой сильно коррелированное (связанное) состояние двух квазичастиц с полным моментом $k = 2$. Такая модель дает правильную энергию первого возбужденного состояния и величину вероятности $E2$-перехода с этого уровня, а также зависимость этих величин от числа наружных нуклонов.

В настоящей работе в рамках указанной модели анализируются различные поправки к гармоническому приближению. Происхождение этих поправок связано с отличием пары связанных квазичастиц в ядре от идеального возбуждения Бозе («фонона»). Это отличие приводит к дополнительным

[1] Имеются в виду ядра, не принадлежащие к деформированным, с хорошо проявляющимся вращательным спектром. Такое деление, конечно, условно. Не исключено существование ядер промежуточного типа.

членам в гамильтониане, причем параметры, входящие в эти члены, в принципе могут быть вычислены без введения новых феноменологических констант. Анализ различных поправок проводится в предположении малости частоты коллективных возбуждений («адиабатичность»).

2. Гармоническое приближение

Рассмотрим систему нуклонов (пока ограничимся для простоты одним видом) в верхней незаполненной оболочке, состоящей из нескольких подоболочек с квантовыми числами $\nu = \{n, l, j\}$ и энергиями ε_ν. Как было показано ранее [3], при изучении коллективных возбуждений сферических ядер можно рассматривать модельный гамильтониан, включающий только парные взаимодействия нуклонов в состояниях с моментами $k = 0$ и $k = 2$:

$$H = H_0 + H_{int}, \qquad H_0 = \sum_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda) \sum_m a^+_{\nu m} a_{\nu m} = \sum_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda) \sqrt{2j_\nu + 1}\, \bar{B}_{00}(\nu),$$

$$H_{int} = -\tfrac{1}{2} \sum_{\nu\nu'}^{(k=0,2)} f_k(\nu, \nu') \sum_\mu \bar{A}^+_{k\mu}(\nu) \bar{A}_{k\mu}(\nu') -$$

$$-\tfrac{1}{2} \sum_{\nu\nu'}^{(k=2)} F_k(\nu, \nu') \sum_\mu \bar{B}^+_{k\mu}(\nu) \bar{B}_{k\mu}(\nu'). \tag{2.1}$$

Здесь введены операторы, описывающие пару нуклонов в состоянии с определенным полным моментом k и его проекцией μ:

$$\bar{A}_{k\mu}(\nu) = \sum_{mm'} C^{k\mu}_{j_\nu m j_\nu m'} a_{\nu m'} a_{\nu m}, \tag{2.2}$$

$$\bar{B}_{k\mu}(\nu) = (-1)^\mu \bar{B}^+_{k-\mu}(\nu) = \sum_{mm'} (-1)^{j_\nu - m'} C^{k\mu}_{j_\nu m j_\nu - m'} a^+_{\nu m'} a_{\nu m}$$

($C^{\ldots}_{\ldots}$ — коэффициенты Клебша — Гордана). Операторы $\bar{A}_{k\mu}$ и $\bar{A}^+_{k\mu}$ соответствуют паре частиц (дырок), поэтому первый член в H_{int} описывает спаривание куперовского типа. Второй член в H_{int}, содержащий $\bar{B}_{2\mu}$, описывает взаимодействие пары частица — дырка в состоянии с моментом $k = 2$ («квадрупольное взаимодействие»).

Отметим, что в (2.1) учтены лишь состояния пар, находящихся на одном уровне. Включение парных состояний $(a_{\nu' m'}\, a_{\nu m})$, $\nu' \neq \nu$ приводит лишь к незначительным изменениям в окончательных формулах. Для упрощения вычислений мы ограничиваемся парами (2.2). Общий случай рассматривается в [4].

Для учета куперовского спаривания в состоянии с моментом $k = 0$ совершим известное каноническое преобразование Боголюбова:

$$\alpha_{\nu m} = u_\nu a_{\nu m} - (-1)^{j_\nu - m} v_\nu a^+_{\nu - m}, \qquad u^2_\nu + v^2_\nu = 1, \tag{2.3}$$

которое эквивалентно следующему преобразованию парных операторов:

$$\bar{A}_{k\mu}(\nu) = u^2_\nu A_{k\mu}(\nu) - v^2_\nu (-1)^\mu A^+_{k-\mu}(\nu) - 2u_\nu v_\nu B_{k\mu}(\nu) + \sqrt{2j_\nu + 1}\, u_\nu v_\nu \delta_{k0}\delta_{\mu 0},$$

$$\bar{B}_{k\mu}(\nu) = (u^2_\nu - v^2_\nu) B_{k\mu}(\nu) + u_\nu v_\nu [A_{k\mu}(\nu) + (-1)^\mu A^+_{k-\mu}(\nu)] +$$

$$+ \sqrt{2j_\nu + 1}\, v^2_\nu \delta_{k0}\delta_{\mu 0}. \tag{2.4}$$

Новые парные операторы $A_{k\mu}$ и $B_{k\mu}$ выражаются через $\alpha_{\nu m}$ с помощью соотношения, аналогичного (2.2). Параметры u_ν и v_ν преобразования (2.3) определяются, как обычно, из условия обращения в нуль коэффициента при $(A^+_{00} + A_{00})$ в преобразованном гамильтониане. В результате гамильтониан принимает вид

$$H = H'_0 + H'_{int} = W_0 + \tfrac{1}{2} \sum_\nu \sqrt{2j_\nu + 1}\, E_\nu B_{00}(\nu) + H'_{int}. \tag{2.5}$$

Здесь W_0 не содержит операторов, а энергия пары квазичастиц $E_\nu = 2\sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta_\nu^2}$, где Δ_ν удовлетворяет уравнению

$$\Delta_\nu = \frac{1}{\sqrt{2j_\nu + 1}} \sum_{\nu'} \frac{f_0(\nu, \nu')}{E_{\nu'}} \sqrt{2j_{\nu'} + 1}\ \Delta_{\nu'}. \tag{2.6}$$

Последний член в (2.5), описывающий взаимодействие квазичастиц, имеет вид

$$\begin{aligned} H'_{int} = &- \tfrac{1}{2} \sum_{\nu\nu'}^{(k=0,2)} f_k(\nu, \nu') \sum_{\mu} (-1)^\mu [\cos\vartheta_\nu A^{(+)}_{k-\mu}(\nu) - A^{(-)}_{k-\mu}(\nu) - \\ &- 2\sin\vartheta_\nu B_{k-\mu}(\nu)][\cos\vartheta_{\nu'} A^{(+)}_{k\mu}(\nu') + A^{(-)}_{k\mu}(\nu') - 2\sin\vartheta_{\nu'} B_{k\mu}(\nu')] - \\ &- \tfrac{1}{2} \sum_{\nu\nu'}^{(k=2)} F_k(\nu, \nu') \sum_{\mu} (-1)^\mu [\cos\vartheta_\nu B_{k-\mu}(\nu) + \sin\vartheta_\nu A^{(+)}_{k-\mu}(\nu)] \times \\ &\times [\cos\vartheta_{\nu'} B_{k\mu}(\nu') + \sin\vartheta_{\nu'} A^{(+)}_{k\mu}(\nu')], \end{aligned} \tag{2.7}$$

где для сокращения положено

$$A^{(\mp)}_{k\mu}(\nu) = \tfrac{1}{2}[A_{k\mu}(\nu) \pm (-1)^\mu A^+_{k-\mu}(\nu)], \tag{2.8}$$

$$\sin\vartheta_\nu = 2u_\nu v_\nu = 2\Delta_\nu / E_\nu, \qquad \cos\vartheta_\nu = u_\nu^2 - v_\nu^2 = 2(\varepsilon_\nu - \lambda)/E_\nu. \tag{2.9}$$

Член H'_0 в (2.5) соответствует системе независимых квазичастиц. Возбуждения такой системы связаны с разрывом куперовской пары и имеют энергию, равную сумме энергий двух квазичастиц E_ν. Такие возбужденные состояния получаются действием на основное состояние оператора $A^+_{k\mu}$, который является собственным оператором гамильтониана H'_0:

$$[H'_0; A_{k\mu}(\nu)] = -E_\nu A_{k\mu}(\nu). \tag{2.10}$$

При включении взаимодействия между квазичастицами появляется возможность коллективных возбуждений, которые с микроскопической точки зрения представляют собой связанные состояния квазичастиц. Эти состояния были рассмотрены [3] с помощью двухчастичных функций Грина. Для дальнейшего оказывается удобным воспользоваться методом Андерсона [5].

По аналогии с уравнением (2.10) для собственного оператора «одночастичных» возбуждений $A^+_{k\mu}$ гамильтониана H'_0 будем искать собственный оператор $\mathfrak{A}^+_{k\mu}$ полного гамильтониана (2.5), удовлетворяющий уравнению

$$[H; \mathfrak{A}_{k\mu}] = -\omega_k \mathfrak{A}_{k\mu}. \tag{2.11}$$

Для нахождения зависимости оператора $\mathfrak{A}$ от парных операторов A и B рассмотрим коммутационные свойства последних. Легко видеть, что имеют место следующие перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} [A_{k\mu}(\nu); A^+_{k'\mu'}(\nu')] &= 2\delta_{\nu\nu'}\{\delta_{kk'}\delta_{\mu\mu'} - 2\sum_{k_1\mu_1} w_\nu(k'k_1; k)\, C^{k\mu}_{k'\mu' k_1\mu_1} B_{k_1\mu_1}(\nu)\}, \\ [B_{k\mu}(\nu); A^+_{k'\mu'}(\nu')] &= 2\delta_{\nu\nu'} \sum_{k_1\mu_1} w_\nu(k_1, k; k')\, C^{k'\mu'}_{k_1\mu_1 k\mu} A^+_{k_1\mu_1}(\nu), \end{aligned} \tag{2.12}$$

где величины w_ν связаны с коэффициентами Рака:

$$w_\nu(k_1k_2; k_3) = \sqrt{(2k_1 + 1)(2k_2 + 1)}\, W(j_\nu j_\nu k_1 k_2; k_3 j_\nu). \tag{2.12'}$$

Основной вклад в образование коллективных возбуждений дают уровни с большими j. Поэтому для оценки операторных членов в правых частях (2.12)

подставим вместо w_ν его асимптотическое выражение, справедливое при больших j_ν [6]:

$$w_\nu(k_1k_2; k_3) \approx \frac{1}{\sqrt{2j_\nu+1}} \sqrt{\frac{(2k_1+1)(2k_2+1)}{2k_3+1}} C^{k_30}_{k_10k_20}. \tag{2.13}$$

Как следует из (2.13), операторные члены в (2.12) содержат малый параметр

$$1/g_\nu = 1/\sqrt{2j_\nu+1} \tag{2.14}$$

и в первом приближении могут быть опущены [2], т. е. операторы $A_{k\mu}/\sqrt{2}$ и $A^+_{k\mu}/\sqrt{2}$ можно считать бозевскими и коммутирующими с оператором $B_{k\mu}$. Оператор $B_{k\mu}$ в этом приближении коммутирует с гамильтонианом и его можно положить равным нулю. Заметим, однако, что в H_0' оператор B_{00} входит с большим множителем g_ν, так что в этот член следует подставить более точное выражение для B_{00}:

$$B_{00}(\nu) = g_\nu^{-1} \sum_{k\mu} A^+_{k\mu}(\nu) A_{k\mu}(\nu), \tag{2.15}$$

которое удовлетворяет соотношениям коммутации (2.12) с точностью до членов g_ν^{-2}.

Таким образом, в этом приближении гамильтониан является квадратичной формой относительно бозе-операторов $A_{k\mu}$ и $A^+_{k\mu}$:

$$H = \tfrac{1}{2}\sum_{\nu;k\mu} E_\nu A^+_{k\mu}(\nu) A_{k\mu}(\nu) + \tfrac{1}{2}\sum_{\nu_1\nu_2;\,k\mu} (-1)^\mu \{f_k(\nu_1,\nu_2) A^{(-)}_{k-\mu}(\nu_1) A^{(-)}_{k\mu}(\nu_2) -$$
$$- [f_k(\nu_1,\nu_2)\cos\vartheta_{\nu_1}\cos\vartheta_{\nu_2} + F_k(\nu_1,\nu_2)\sin\vartheta_{\nu_1}\sin\vartheta_{\nu_2}] A^{(+)}_{k-\mu}(\nu_1) A^{(+)}_{k\mu}(\nu_2)\} \tag{2.16}$$

(постоянные члены опущены). В первой сумме (2.16) момент k принимает только одно значение $k=2$ (член с f_0 для дальнейшего несуществен); однако мы распространим суммирование на остальные значения k, считая ниже, что $f_k = F_k = 0$ при $k \neq 2$. Собственный оператор такого гамильтониана можно искать в виде линейной комбинации:

$$\mathfrak{A}_{k\mu} = \sum_\nu \{\chi^{(+)}_k(\nu) A^{(+)}_{k\mu}(\nu) + \chi^{(-)}_k(\nu) A^{(-)}_{k\mu}(\nu)\}. \tag{2.17}$$

Из условия $[\mathfrak{A}_{k\mu}; \mathfrak{A}^+_{k'\mu'}] = \delta_{kk'}\delta_{\mu\mu'}$ следует (ниже считаем $\chi^{(\pm)}$ действительными)

$$2\sum_\nu \chi^{(-)}_k(\nu)\chi^{(+)}_k(\nu) = 1. \tag{2.18}$$

Подставляя (2.17) в (2.11), после несложных преобразований получим следующую систему уравнений для $\chi^{(\pm)}_k(\nu)$:

$$\omega\chi^{(-)}_k(\nu) - E_\nu\chi^{(+)}_k(\nu) + \sum_{\nu'} f_k(\nu',\nu)\chi^{(+)}_k(\nu') = 0, \tag{2.19}$$
$$\omega\chi^{(+)}_k(\nu) - E_\nu\chi^{(-)}_k(\nu) +$$
$$+ \sum_{\nu'} {}_k[f(\nu',\nu)\cos\vartheta_{\nu'}\cos\vartheta_{\nu'} + F_k(\nu',\nu)\sin\vartheta_\nu\sin\vartheta_{\nu'}]\chi^{(-)}_k(\nu') = 0$$

Решение системы (2.19) в общем виде представляет значительные трудности, поэтому полезно рассмотреть некоторые частные случаи.

[2] Фактически, как будет видно из дальнейшего (см. раздел 4), малый параметр определяется не числом состояний в подоболочке, а полным числом состояний во всей оболочке.

а) Рассмотрим сначала решение (2.19) для одной подоболочки с $j \gg 1$. Секулярное уравнение в этом случае дает для энергии возбуждений

$$\omega_k = (E - f_k)\left[1 - \frac{(F_k - f_k)\sin^2\vartheta}{E - f_k}\right]^{1/2}, \tag{2.20}$$

а коэффициенты $\chi_k^{(\pm)}$, определяемые из (2.18) и (2.19), равны

$$\chi_k^{(+)} = \sqrt{\omega_k/2\,(E - f_k)}, \qquad \chi_k^{(-)} = \sqrt{(E - f_k)\,/\,2\omega_k}. \tag{2.21}$$

Возбужденные состояния могут иметь моменты 2, 4, . . ., $2j - 1$, причем энергия возбуждений с $k \neq 2$ совпадает с E, а $\chi_k^{(+)} = \chi_k^{(-)}$ (это соответствует тому, что $\mathfrak{A}_{k\mu} = A_{k\mu}/\sqrt{2}$ — возбуждения остаются одночастичными). Состояние с моментом $k = 2$ «коллективизируется», энергия этого состояния снижается (при $F_2 - f_2 > 0$), причем снижение увеличивается по мере удаления от замкнутой оболочки ($\sin^2\vartheta = 4\,[N/\,(2j + 1)]\,(1 - N\,/\,(2j + 1)] \to 1$). При достаточно хорошей адиабатичности коллективных возбуждений ($\omega_2/\,(E - f_2) \ll 1$)

$$\chi_2^{(-)} = \frac{E - f_2}{\omega_2}\,\chi_2^{(+)} \gg \chi_2^{(+)}. \tag{2.22}$$

б) В случае одного j-уровня существует лишь одно состояние с определенным моментом, поэтому уравнения для различных состояний не перепутываются. При наличии группы подоболочек существует несколько парных возбуждений с одним и тем же моментом. В общем случае все состояния с одним и тем же моментом описываются общей системой уравнений. Нас интересуют лишь парные возбужденные состояния с моментом 2, так как мы не рассматриваем парных взаимодействий с другими моментами. Поэтому далее мы будем выписывать лишь уравнения для $k = 2$ и опускать индекс k.

Для того чтобы установить характер новых возбуждений, рассмотрим случай группы близких подоболочек, когда их расщеплением по энергии можно пренебречь. В этом случае система (2.19) может быть решена, если предположить, что коэффициенты взаимодействия f и F факторизуются:

$$f(\nu, \nu') = f' g_\nu g_{\nu'}, \qquad F(\nu, \nu') = F' g_\nu g_{\nu'}. \tag{2.23}$$

((2.23) справедливо в довольно широких предположениях о виде взаимодействия для больших j_ν, $j_{\nu'}$). С учетом (2.23) система (2.19) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega\chi^{(-)}(\nu) - E\chi^{(+)}(\nu) + f' g_\nu x^{(+)} &= 0, \\ \omega\chi^{(+)}(\nu) - E\chi^{(-)}(\nu) + (f'\cos^2\vartheta + F'\sin^2\vartheta)\, g_\nu x^{(-)} &= 0, \end{aligned} \tag{2.24}$$

где $x^{(\pm)} = \sum_\nu g_\nu \chi^{(\pm)}(\nu)$. Из (2.24) легко получается система однородных алгебраических уравнений для величин $x^{(\pm)}$. Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к выражению (2.20) для энергии коллективного возбуждения, где вместо f и F стоят эффективные значения коэффициентов:

$$f \to f_{eff} = f' \sum_\nu g_\nu^2, \qquad F \to F_{eff} = F' \sum_\nu g_\nu^2, \tag{2.25}$$

а выражения для $\chi^{(+)}$, вместо (2.21), принимают вид

$$\chi^{(+)}(\nu) = \sqrt{\frac{\omega}{2\,(E - f_{eff})}}\,\rho_\nu, \qquad \chi^{(-)}(\nu) = \sqrt{\frac{E - f_{eff}}{2\omega}}\,\rho_\nu,$$
$$\rho_\nu = g_\nu \left(\sum_{\nu'} g_{\nu'}^2\right)^{-1/2}. \tag{2.26}$$

Таким образом, все подоболочки дают когерентный вклад в коллективное возбуждение.

Остальные возбуждения соответствуют тривиальному решению $x^{(\pm)} = 0$. При этом, как непосредственно видно из (2.24),

$$\omega = E, \qquad \chi^{(+)}(\nu) = \chi^{(-)}(\nu), \tag{2.27}$$

а зависимость величин $\chi^{(\pm)}$ от ν определяется из условия

$$x^{(\pm)} = \sum_{\nu} g_{\nu}\chi^{(\pm)}(\nu) = 0. \tag{2.28}$$

Таким образом, при наличии нескольких подоболочек дополнительные решения, как следует из (2.27), имеют одночастичный характер, а характер коллективного решения не меняется. В частности, в случае хорошей адиабатичности остается справедливым неравенство (2.22). В отличие от коллективного состояния, вклады различных подоболочек в одночастичные возбуждения некогерентны, что видно из (2.28).

в) Рассмотрим общий случай произвольного числа расщепленных подоболочек, но для упрощения будем пренебрегать величиной $f(\nu, \nu')$ (как видно из предыдущего, учет ее сводится лишь к некоторой перенормировке одночастичных энергий и константы E). Кроме того, будем считать, что энергия коллективного возбуждения значительно ниже энергии одночастичного возбуждения с моментом $k = 2$, т. е. выполняется условие адиабатичности. При сделанных предположениях секулярное уравнение, определяющее энергию коллективного возбуждения, принимает вид

$$\omega^2 = \left[1 - F'\sum_{\nu}\frac{g_{\nu}^2 \sin^2\vartheta_{\nu}}{E_{\nu}}\right] \Big/ F'\sum_{\nu'}\frac{g_{\nu'}^2 \sin^2\vartheta_{\nu'}}{E_{\nu'}^3}, \tag{2.29}$$

причем условие адиабатичности означает, что величина, стоящая в квадратных скобках, мала. Это условие позволяет исключить $F' = [\Sigma_{\nu} g_{\nu}^2 \sin^2\vartheta_{\nu}/E_{\nu}]^{-1}$ и выразить решение системы (2.19) непосредственно через энергии возбужденных состояний. Вводя индекс σ, соответствующий различным типам возбуждений ($\sigma = \sigma_0$ отвечает коллективному возбуждению), нетрудно получить в результате простых выкладок

$$\chi^{(-)}(\nu, \sigma) = \sqrt{\frac{E_{\nu}}{2\omega(\sigma)}}\,\rho_{\nu}(\sigma), \qquad \chi^{(+)}(\nu, \sigma) = \sqrt{\frac{\omega(\sigma)}{2E_{\nu}}}\,\rho_{\nu}(\sigma), \tag{2.30}$$

где для коллективной ветви

$$\rho_{\nu}(\sigma_0) = g_{\nu}\frac{\sin\vartheta_{\nu}}{E_{\nu}^{3/2}} \Big/ \left(\sum_{\nu'} g_{\nu'}^2 \frac{\sin^2\vartheta_{\nu'}}{E_{\nu'}^3}\right)^{1/2}, \tag{2.30'}$$

а величины $\rho_{\nu}(\sigma)$ для возбуждений других типов находятся из условий ортогональности:

$$\sum_{\nu}\{\chi^{(-)}(\nu, \sigma)\,\chi^{(+)}(\nu, \sigma') + \chi^{(-)}(\nu, \sigma')\,\chi^{(+)}(\nu, \sigma)\} = \sum_{\nu}\rho_{\nu}(\sigma)\,\rho_{\nu}(\sigma') = \delta_{\sigma\sigma'}. \tag{2.31}$$

Так, в частном случае двух уровней из (2.31) следует:

$$\rho_1(\sigma_1) = \rho_2(\sigma_0), \qquad \rho_2(\sigma_1) = -\rho_1(\sigma_0). \tag{2.30''}$$

Из сравнения (2.29) с (2.26) видно, что энергетическое расщепление подоболочек не вносит принципиальных изменений; меняется лишь вклад различных уровней в коллективное состояние (вид ρ_{ν}). При этом, согласно (2.30'), при удалении подоболочки от границы Ферми вклад ее падает очень резко ($\sim E_{\nu}^{-3/2} \sin\vartheta_{\nu} \sim E_{\nu}^{-5/2}$).

Используя свойства ортогональности различных ветвей, можно обратить равенство (2.17). В результате получим

$$A^{(\pm)}_{k\mu}(\nu) = \sum_{\sigma} \chi^{(\mp)}_{k}(\nu, \sigma)\{\mathfrak{A}_{k\mu}(\sigma) \pm (-1)^{\mu}\mathfrak{A}^{+}_{k-\mu}(\sigma)\}. \qquad (2.32)$$

3. Анализ поправок к гармоническому приближению

В предыдущем разделе в определенном приближении были найдены коллективные и одночастичные ветви возбуждений сферического ядра. Первое упрощающее предположение относилось к форме исходного гамильтониана, где были оставлены лишь члены, описывающие взаимодействия пар в состояниях с моментами $k = 0$ и $k = 2$. Включение в гамильтониан парных взаимодействий с высшими моментами не затрагивает коллективной ветви, меняя лишь спектр одночастичных возбуждений. Мы не ставили своей целью рассмотрение этих возбуждений, которые, к тому же, очень чувствительны к схеме нуклонных уровней в самосогласованном поле. С другой стороны, для рассмотрения только коллективной ветви можно ограничиться гамильтонианом (2.1).

Второе существенное приближение связано с заменой операторов пар квазичастиц на бозевские, т. е. пренебрежением операторными членами в (2.12) [3]. Порядок величины оператора $A_{2\mu}$, входящего в эти члены, можно оценить, заменив его амплитудой нулевых колебаний (см. (2.31)):

$$A_{2\mu} \to \chi^{(-)} \sim \sqrt{E/\omega}. \qquad (3.1)$$

Поэтому отброшенные члены имеют порядок $\xi(E/\omega)^{1/2}$, где параметр ξ в общем случае определяется величиной $\left[\sum_{\nu}(2j_\nu+1)\right]^{-1/2}$ (см. оценку (4.1)). Для одночастичных возбуждений дополнительный множитель $(E/\omega)^{1/2} \sim 1$, но для коллективных возбуждений он может в значительной мере компенсировать малость ξ, причем компенсация тем больше, чем лучше адиабатичность. Целью дальнейшего рассмотрения является учет по теории возмущений членов, в которых малый параметр ξ максимально компенсирован параметром адиабатичности E/ω.

Найдем выражения для парных операторов $A_{k\mu}$ и $B_{k\mu}$ так, чтобы правила коммутации (2.12) удовлетворялись с точностью до высших членов по малому параметру (аналогично приближению для B_{00} (2.15)). Для этого введем точные бозе-операторы $A^0_{k\mu}$ (которые в нулевом приближении совпадают с $A_{k\mu}$) и будем искать $A_{k\mu}$ и $B_{k\mu}$ в виде ряда по $A^0_{k\mu}$. Коэффициенты ряда определим из условия выполнения (2.12) с точностью до членов высшего порядка. Легко проверить, что первые члены разложения имеют вид

$$B_{k\mu}(\nu) \equiv b_{k\mu}(\nu) + B^{(1)}_{k\mu}(\nu) = b_{k\mu}(\nu) + 2\sum_{k_1k_2} w_\nu(k_1, k_2; k)(A^{0+}_{k_1}(\nu)A^0_{k_2}(\nu))_{k\mu},$$

$$A_{k\mu}(\nu) = A^0_{k\mu}(\nu) - \sum_{k_1k_2} w_\nu(k_1k_2; k)(A^0_{k_1}(\nu)\, b_{k_2}(\nu))_{k\mu} -$$

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{k_1k_2k_3l}(-1)^l w_\nu(k_1k_2; l)\, w_\nu(lk_3; k)((A^{0+}_{k_1}(\nu)A^0_{k_2}(\nu))_l A^0_{k_3}(\nu))_{k\mu}, \qquad (3.2)$$

где w_ν определено в (2.12′), а символ $(\ldots)_{k\mu}$ означает сложение с коэффициен-

[3] Это приближение полностью эквивалентно суммированию непрерывной цепочки двухчастичных графиков (ср. приближение Савады для электронного газа [7]).

тами Клебша — Гордана в момент k, например,

$$(A^{0+}_{k_1} A^{0}_{k_2})_{k\mu} = \sum_{(\mu)} C^{k\mu}_{k_1\mu_1 k_2\mu_2} (-1)^{\mu_1} A^{0+}_{k_1-\mu_1} A^{0}_{k_2\mu_2}. \tag{3.3}$$

В (3.2) входит произвольный оператор $b_{k\mu}$, коммутирующий с $A^0_{k\mu}$. В первом приближении по ξ он коммутирует также с гамильтонианом. Его действие как на основное, так и на возбужденное коллективное состояния дает нуль. Поэтому в дальнейшем мы не будем рассматривать члены, содержащие $b_{k\mu}$ [4].

Подставляя разложение (3.2) в гамильтониан (2.5) — (2.7), мы получим наряду с основной частью (квадратичной по бозе-операторам $A^0_{k\mu}$) добавочные члены, содержащие произведения трех, четырех и т. д. операторов $A^0_{k\mu}$. Чтобы подчеркнуть порядок величины и структуру добавочных членов, запишем это разложение в следующем схематическом виде:

$$H = H^{(0)}(A^{02}) + E\xi h^{(1)}(A^{03}) + E\xi^2 h^{(2)}(A^{04}) + \ldots, \tag{3.4}$$

где $h^{(i)}$ — безразмерные линейные комбинации соответствующих произведений бозе-операторов. Хотя как линейный, так и квадратичный по ξ члены в (3.4) дают поправку к энергии, пропорциональную ξ^2, однако вклады от этих членов содержат различные степени параметра E/ω. Линейный по ξ член (3.4) дает поправку к энергии возбуждений во втором порядке теории возмущений; ее можно оценить, используя (3.1):

$$\delta' E \sim E^2\xi^2\chi^{(-)6}/\omega \sim \omega\xi^2 (E/\omega)^5. \tag{3.5}$$

С другой стороны, сдвиг энергии, вызванный квадратичным по ξ членом (3.4) (в первом приближении теории возмущений), по порядку величины равен

$$\delta'' E \sim E\xi^2\chi^{(-)4} \sim \omega\xi^2 (E/\omega)^3. \tag{3.5'}$$

Из (3.5) и (3.5′) видно, что поправка от линейного по ξ члена содержит лишний компенсирующий множитель $(E/\omega)^2$ и, таким образом, в случае хорошей адиабатичности коллективного возбуждения ($E/\omega \gg 1$) является преобладающей.

Имея в виду рассматривать лишь поправки с наиболее компенсированным параметром малости, мы ограничимся сначала только линейным по ξ членом в гамильтониане (3.4). Явное выражение для этого члена имеет вид

$$H^{(1)} = -\frac{1}{2}\sum_{\nu_1\nu_2} \{F(\nu_1, \nu_2) \cos\vartheta_{\nu_1} \sin\vartheta_{\nu_2} - f(\nu_1, \nu_2) \sin\vartheta_{\nu_1} \cos\vartheta_{\nu_2}\} B^{(1)}_{2\mu}(\nu_1) \times$$
$$\times [A^{0+}_{2\mu}(\nu_2) + (-1)^{\mu} A^{0}_{2-\mu}(\nu_2)], \tag{3.6}$$

где $B^{(1)}_{k\mu}$ определено в (3.2). Удобно выразить $H^{(1)}$ через операторы «фононов» $\mathfrak{A}_{k\mu}(\sigma)$, связь которых с бозе-операторами $A^0_{k\mu}$ дается формулой (2.32) (где следует заменить $A_{k\mu}$ на $A^0_{k\mu}$). Подставляя (3.2) и (2.32) в гамильтониан (3.6), получим

$$H^{(1)} = -\sum_{k_1\mu_1 k_2\mu_2;\mu;\nu\nu'} w_{\nu\nu'}(k_1k_2; 2) \{F(\nu, \nu') \cos\vartheta_{\nu'} \sin\vartheta_{\nu} - f(\nu, \nu') \sin\vartheta_{\nu'} \cos\vartheta_{\nu}\} \times$$
$$\times (-1)^{\mu} C^{2\mu}_{k_1\mu_1 k_2\mu_2} \sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} [\chi^{(-)}_{k_1}(\nu', \sigma_1)\, \chi^{(-)}_{k_2}(\nu', \sigma_2)\, \mathfrak{A}^{(+)}_{k_1\mu_1}(\sigma_1)\, \mathfrak{A}^{(+)}_{k_2\mu_2}(\sigma_2) -$$
$$- \chi^{(+)}_{k_1}(\nu', \sigma_1)\, \chi^{(+)}_{k_2}(\nu', \sigma_2)\, \mathfrak{A}^{(-)}_{k_1\mu_1}(\sigma_1)\, \mathfrak{A}^{(-)}_{k_2\mu_2}(\sigma_2)]\, \chi^{(-)}_{2}(\nu, \sigma_3)\, \mathfrak{A}^{(+)}_{2-\mu}(\sigma_3), \tag{3.7}$$

[4] В нечетном ядре оператор $b_{k\mu}$ описывает возбуждения нечетной частицы.

где

$$\mathfrak{A}^{(\pm)}_{k\mu}(\sigma) = \mathfrak{A}_{k\mu}(\sigma) \pm (-1)^{\mu} \mathfrak{A}^{+}_{k-\mu}(\sigma). \tag{3.8}$$

Гамильтониан (3.7) содержит сумму по всем типам возбуждений. Среди них есть коллективная ветвь ($k = 2, \sigma = \sigma_0$), для которой $\chi^{(-)} \gg 1 \gg \chi^{(+)}$. С другой стороны, для остальных, одночастичных, возбуждений $\chi^{(-)} \sim \sim \chi^{(+)} \sim 1$. Поэтому основным по параметру адиабатичности $E/\omega \gg 1$ будет член, в котором все операторы $\mathfrak{A}$ принадлежат к коллективной ветви:

$$H_c^{(1)} = -\tfrac{1}{3} \Gamma\, \omega(\sigma_0) \sum_{\mu_1\mu_2} (-1)^{\mu} C^{2-\mu}_{2\mu_1 2\mu_2}\, \mathfrak{A}^{(+)}_{2\mu_1}(\sigma_0)\, \mathfrak{A}^{(+)}_{2\mu_2}(\sigma_0)\, \mathfrak{A}^{(+)}_{2\mu}(\sigma_0), \tag{3.9}$$

где введен безразмерный параметр

$$\Gamma = \frac{3}{\omega(\sigma_0)} \sum_{\nu\nu'} w_{\nu'}(22;2)\, \{F(\nu,\nu') \cos\vartheta_{\nu'} \sin\vartheta_{\nu} - f(\nu,\nu') \sin\vartheta_{\nu'} \cos\vartheta_{\nu}\} \times$$
$$\times\, \chi^{(-)2}(\nu', \sigma_0)\, \chi^{(-)}(\nu, \sigma_0). \tag{3.10}$$

4. Ангармонические поправки первого приближения

Здесь мы рассмотрим поправки, связанные с гамильтонианом (3.9). Прежде всего оценим малость параметра Γ, входящего в этот член. Для простоты считаем, что $f(\nu, \nu') = 0$, а $F(\nu, \nu')$ удовлетворяет условию (2.23). Используя формулы раздела 2, в, получим при этом из (3.10)

$$\Gamma = \frac{3}{2\sqrt{2}\,[\omega(\sigma_0)]^{5/2}} \sum_{\nu} \rho^2_{\nu}(\sigma_0)\, E^2_{\nu} \sum_{\nu'} \rho^2_{\nu'}(\sigma_0)\, g_{\nu'}\, w_{\nu'}(22;2)\, E_{\nu'} \cos\vartheta_{\nu'} \times$$
$$\times \left(\sum_{\lambda} \frac{g^2_{\lambda} \sin^2\vartheta_{\lambda}}{E^3_{\lambda}} \right)^{1/2} \Big/ \sum_{\lambda'} \frac{g^2_{\lambda'} \sin^2\vartheta_{\lambda'}}{E_{\lambda'}}. \tag{4.1}$$

Из (4.1) непосредственно видно, что малость Γ связана с суммарной величиной g^2_{ν} по группе подоболочек, поэтому параметр ξ, введенный в (3.4), по порядку величины равен $\xi \sim [\Sigma_{\nu} (2j_{\nu} + 1)]^{-1/2}$. (Суммы с ρ^2_{ν} дают лишь средние значения соответствующих величин, так как $\rho^2_{\nu}(\sigma_0)$ из (2.30′) является нормированной весовой функцией. Напомним, что согласно (2.13), $g_{\nu} w_{\nu} \sim 1$.)

Рассматривая гамильтониан (3.9) как возмущение, вычислим поправки к энергетическим уровням и волновым функциям. Функции нулевого приближения характеризуются числом «фононов» n и полным моментом k. Мы будем их обозначать $|n; k\mu\rangle$. Основное состояние $|0; 00\rangle \equiv |0\rangle$ (вакуум по «фононам») определяется уравнением

$$\mathfrak{A}_{2\mu}|0\rangle = 0. \tag{4.2}$$

Одно- и двухфононное состояния соответственно определяются как

$$|1; 2\mu\rangle = \mathfrak{A}^{+}_{2\mu}|0\rangle,$$
$$|2; k\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathfrak{A}^{+2})_{k\mu}|0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mu_1\mu_2} C^{k\mu}_{2\mu_1 2\mu_2}\, \mathfrak{A}^{+}_{2\mu_1}\, \mathfrak{A}^{+}_{2\mu_2}|0\rangle. \tag{4.3}$$

Мы ограничимся нахождением поправок к состояниям (4.2) и (4.3).

Матричные элементы гамильтониана (3.9) отличны от нуля для переходов между состояниями, различающимися одним или тремя фононами. Учитывая, что три оператора в (3.9) сложены в момент 0, легко видеть, что $H_c^{(1)}$

приводит к переходам в следующие состояния [5]:

$$|3;\,00\rangle = \frac{1}{\sqrt{30}}(\mathfrak{A}^{+3})_{00}|0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{30}}\sum_{(\mu)}(-1)^{\mu_3}C^{2-\mu_3}_{2\mu_1 2\mu_2}\mathfrak{A}^{+}_{2\mu_1}\mathfrak{A}^{+}_{2\mu_2}\mathfrak{A}^{+}_{2\mu_3}|0\rangle,$$

$$|3;\,k\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+2z_k)}}((\mathfrak{A}^{+2})_2\mathfrak{A}^{+})_{k\mu}|0\rangle, \qquad |4;\,2\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{48}}(\mathfrak{A}^{+3})_{00}\mathfrak{A}^{+}_{2\mu}|0\rangle,$$

$$|5;\,k\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{12(11+3\delta_{k2})}}(\mathfrak{A}^{+3})_{00}(\mathfrak{A}^{+2})_{k\mu}|0\rangle, \tag{4.3'}$$

где $z_k = 5W(22\,22;\,2k) = 1;\ -{}^3/_{14};\ {}^2/_7$ соответственно для $k = 0;\,2;\,4$.

В результате применения обычной теории возмущений получим следующие исправленные волновые функции $\Psi(n;\,k\mu)$:

$$\Psi(0;\,00) = |0\rangle - \Gamma\sqrt{{}^{10}/_{27}}|3;\,00\rangle, \tag{4.4}$$

$$\Psi(1;\,2\mu) = |1;\,2\mu\rangle - \Gamma\{\sqrt{2}|2;\,2\mu\rangle + \sqrt{{}^{16}/_{27}}|4;\,2\mu\rangle\},$$

$$\Psi(2;\,k\mu) = |2;\,k\mu\rangle - \Gamma\{-\delta_{k2}\sqrt{2}|1;\,2\mu\rangle + 2\sqrt{1+2z_k}|3;\,k\mu\rangle + \sqrt{{}^2/_{27}(11+3\delta_{k2})}|5;\,k\mu\rangle\}.$$

Поправки к энергиям состояний (4.2) и (4.3) равны

$$\delta E(0;\,0) = -\tfrac{10}{9}\Gamma^2\omega; \qquad \delta E(1;\,2) = -\tfrac{34}{9}\Gamma^2\omega;$$
$$\delta E(2;\,k) = -\frac{\Gamma^2}{9}(58 + 72z_k - 12\delta_{k2})\,\omega, \tag{4.5}$$

откуда для поправленных энергий возбужденных состояний (отсчитанных от основного) получаем

$$E(1;\,2) = \omega\left(1 - \tfrac{8}{3}\Gamma^2\right), \qquad E(2;\,2) = 2\omega\left(1 - \tfrac{8}{7}\Gamma^2\right),$$
$$E(2;\,0) = 2\omega\left(1 - \tfrac{20}{3}\Gamma^2\right), \qquad E(2;\,4) = 2\omega\left(1 - \tfrac{80}{21}\Gamma^2\right). \tag{4.6}$$

Представляют интерес вероятности электромагнитных переходов между состояниями (4.4). Предварительно заметим, что общие формулы предыдущих разделов справедливы также и в случае системы из нейтронов и протонов. Для этого следует считать, что индекс ν, нумерующий подоболочки, относится как к нейтронной, так и к протонной подсистемам. Отсутствие куперовского спаривания между нейтронами и протонами мы учтем, считая в (2.6) параметр $f_0(\nu,\,\nu')$ равным нулю, если ν и ν' принадлежат разным подсистемам. Связь между нейтронами и протонами осуществляется квадрупольным взаимодействием, которое можно считать одинаковым для пары нуклонов любого типа (nn, pp, np) [6].

Электромагнитные $E2$-переходы между коллективными состояниями с точностью до членов порядка $(\omega/E)^2$ осуществляются оператором

$$\hat{Q}_{2\mu} = Q_0\mathfrak{A}^{(+)}_{2\mu}(\sigma_0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{\nu}e_\nu\langle r^2Y_2\rangle_\nu \sin\vartheta_\nu\chi^{(-)}(\nu,\,\sigma_0)\,\mathfrak{A}^{(+)}_{2\mu}(\sigma_0), \tag{4.7}$$

[5] Состояния с числом фононов $n > 3$ не определяются однозначно значением момента; однако в состояния, отличные от (4.3'), гамильтониан $H^{(1)}_c$ переходов не дает.

[6] Квадрупольное взаимодействие в значительной степени обусловлено эффектом связи различных нуклонов через поверхность, который, естественно, не зависит от типа нуклонов. Отсутствие куперовского спаривания между нейтроном и протоном в средних и тяжелых ядрах связано с различием в положении их ферми-границ.

где e_ν — эффективный заряд наружных нуклонов ($e_p \approx 1 + e_n$). Используя (4.4), получим для приведенных вероятностей $E2$-переходов (в единицах Q_0^2):

$$B(2_1 \to 0_0) = 1 - \tfrac{4}{9}\Gamma^2, \quad B(2_2 \to 0_0) = \tfrac{8}{9}\Gamma^2, \quad B(2_2 \to 2_1) = 2\left(1 - \tfrac{428}{63}\Gamma^2\right),$$
$$B(0_2 \to 2_1) = 2\left[1 + \tfrac{8}{9}(1 + 9/\sqrt{5})\Gamma^2\right], \tag{4.8}$$
$$B(4_2 \to 2_1) = 2\,[1 + 4\,(1/\sqrt{5} - 16/63)\,\Gamma^2].$$

Отметим две характерные особенности полученных поправок от гамильтониана (3.9). Во-первых, имеем

$$\lambda_E \equiv \frac{E(2;2)}{E(2;1)} = 2\left(1 + \frac{32}{21}\Gamma^2\right) > 2; \tag{4.9}$$

во-вторых, порядок уровней двухфононного триплета всегда таков, что

$$E(2;0) < E(2;4) < E(2;2). \tag{4.10}$$

Если предположить, что вся экспериментально наблюдаемая ангармоничность ($\lambda_E \approx 2{,}2$) связана с (3.9), то следует считать $\Gamma \approx 0{,}2 \div 0{,}3$. При этом относительные поправки к волновым функциям и вероятностям переходов в ряде случаев становятся близкими к единице, т. е. теория возмущений не является достаточно хорошим приближением. Однако численные расчеты по методу Тамма — Данкова дают близкие результаты. В частности, закономерности (4.9) и (4.10) сохраняются.

Схемы уровней, найденные экспериментально, в ряде случаев не подчиняются (4.9) и (4.10). Это особенно относится к порядку уровней триплета, так как довольно часто уровень 2_2^+ лежит ниже остальных. Для объяснения этих отклонений следует учитывать поправки следующих приближений.

Параметр Γ, определяющий поправки первого приближения, как видно из (3.10), зависит от заполнения посредством множителей $\sin\vartheta_\nu \cos\vartheta_\nu$ и может становиться малым в середине оболочки, когда среднее значение $\cos\vartheta$ близко к нулю. Поэтому в области, где $\overline{\cos\vartheta} < \omega/E$, поправки от квадратичных по ξ членов, не содержащих множителя $\cos\vartheta_\nu$, могут сравниваться и превосходить поправки от (3.9). Эта область может быть достаточно широкой, так как адиабатический параметр ω/E для реальных ядер не является очень малым ($0{,}5 > \omega/E > 0{,}2$).

5. Ангармонические поправки второго приближения

Рассмотрим теперь следующий член разложения (3.4), пропорциональный ξ^2. Его основная часть, содержащая только операторы коллективной ветви, может быть представлена в виде

$$H_c^{(2)} = \omega \sum_L \gamma_L h_L \equiv \omega \sum_L \gamma_L ((\mathfrak{A}^{(+)}(\sigma_0)\,\mathfrak{A}^{(+)}(\sigma_0))_L\,(\mathfrak{A}^{(+)}(\sigma_0)\,\mathfrak{A}^{(+)}(\sigma_0))_L)_{00}. \tag{5.1}$$

Этот член определяется тремя константами γ_L ($L = 0, 2, 4$), которые в пренебрежении членами, содержащими $\chi^{(+)}$ и $\cos\vartheta_\nu$, имеют вид

$$\gamma_L = \frac{\sqrt{2L+1}}{2\omega} \sum_{\nu\nu'} F(\nu,\nu')\omega_\nu^2 (22; L)\,\chi^{(-)3}(\nu;\sigma_0)\,\chi^{(-)}(\nu';\sigma_0)\sin\vartheta_\nu \sin\vartheta_{\nu'}. \tag{5.2}$$

При произвольных константах γ_L вычисление поправок от (5.1) становится слишком неопределенным. Однако можно установить некоторые общие качественные закономерности, используя лишь тот факт, что все γ_L положительны (см. (5.2)). Сдвиг уровней основного, одно- и двухфононных состояний

в первом приближении определяется матричными элементами

$$\langle 0 \,|\, h_L \,|\, 0\rangle = 5\delta_{L0} + 2\sqrt{2L+1}, \qquad \langle 1;\, 2\mu \,|\, h_L \,|\, 1;\, 2\mu\rangle = 9\delta_{L0} + \tfrac{18}{5}\sqrt{2L+1},$$

$$\langle 2;\, k\mu \,|\, h_L \,|\, 2;\, k\mu\rangle = 13\delta_{L0} + \tfrac{26}{5}\sqrt{2L+1} + \frac{4}{\sqrt{2L+1}}\,\delta_{kL} +$$

$$+ 8\sqrt{2L+1}\, W(2222;\, kL). \tag{5.3}$$

Из (5.3) нетрудно увидеть, что при любом L сдвиг двухфононного уровня 2_2, δE (2; 2), всегда больше, чем удвоенная величина δE (1; 2). Поэтому всегда $\lambda_E > 2$ (как и в (4.9)). Из (5.3) следует также, что все h_L приводят к одинаковому порядку уровней двухфононного триплета, а именно:

$$E(2;\, 2) = E(2;\, 4) < E(2;\, 0), \tag{5.4}$$

что, естественно, сохраняется и для любой комбинации $\Sigma_L \gamma_L h_L$ при $\gamma_L > 0$.

Для количественных оценок констант γ_L можно воспользоваться приближением (2.25) для F и асимптотическим соотношением (2.13). После простых преобразований найдем

$$\gamma_L = \frac{5}{8}\frac{F'}{\omega}\frac{\overline{E^2}}{\omega^2}\overline{\sin^2\vartheta}\sqrt{2L+1}\,(C^{20}_{L020})^2 \equiv \gamma\sqrt{2L+1}\,(C^{20}_{L020})^2. \tag{5.5}$$

Усреднение в (5.5) проводится с весовой функцией (2.30′).

Из (5.3) и (5.5) получим поправки к энергиям уровней:

$$\delta E(0;\, 0) = 15\gamma\omega, \qquad \delta E(1;\, 2) = 27\gamma\omega,$$

$$\delta E(2;\, 2) = \delta E(2;\, 4) = \tfrac{297}{7}\gamma\omega, \qquad \delta E(2;\, 0) = 51\gamma\omega, \tag{5.6}$$

откуда для энергий возбужденных состояний (отсчитанных от основного) с учетом только поправок от (5.1) находим

$$E(1;\, 2) = \omega(1 + 12\gamma), \qquad E(2;\, 2) = E(2;\, 4) = 2\omega\left(1 + \tfrac{96}{7}\gamma\right),$$

$$E(2;\, 0) = 2\omega(1 + 18\gamma); \tag{5.7}$$

$$\lambda_E = 2\left(1 + \tfrac{12}{7}\gamma\right). \tag{5.8}$$

Сравним выражение (5.5) для γ с асимптотическим выражением для константы Γ первого приближения. Из (4.1), используя (2.13) и (2.30′), нетрудно получить

$$\Gamma \approx -\sqrt{\frac{45}{28}}\frac{F'}{\omega^{5/2}}\,\overline{E^2}\,\overline{E\cos\vartheta}\,(F'\overline{E^2})^{-1/2}. \tag{5.9}$$

Из (5.5) и (5.9) находим

$$\Gamma^2/\gamma = \tfrac{18}{7}(\overline{E\cos\vartheta})^2/\omega^2\,\overline{\sin^2\vartheta}. \tag{5.10}$$

6. Связь с другими ветвями возбуждений (неадиабатичность)

Выше рассматривались члены в разложении (3.4), содержащие только операторы коллективной ветви. Замена одного из коллективных операторов одночастичным вносит дополнительную малость порядка $\sqrt{\omega/E}$. Тем не менее, поправки этого типа могут оказаться существенными для высоких возбужденных состояний (двухфононных и выше). Поскольку одночастичные возбуждения существенно определяются индивидуальными особенностями каждого ядра, то количественное рассмотрение поправок этого типа нельзя провести в общем виде. Поэтому мы ограничимся лишь некоторыми оценками. Рассмотрим для примера член с двумя коллективными и одним одно-

частичным оператором, который имеет порядок $H^{(1)}(\sigma_0, \sigma_0, \sigma) \sim \omega\Gamma(\omega/E)^{1/2}$. Этот член приводит к сдвигу в энергии, например, двухфононного состояния

$$\delta''' E(n=2) \sim \frac{\omega^2\Gamma^2(\omega/E)}{2\omega - \omega(\sigma)}. \tag{6.1}$$

При энергии одночастичного возбуждения $\omega(\sigma)$, достаточно близкой к энергии двухфононного состояния, (6.1) может давать заметный вклад, а при $[\omega(\sigma) - 2\omega] \sim \omega^2/E$ по порядку величины сравнивается с ангармонической поправкой первого приближения.

Так как энергии одночастичных возбуждений меняются от ядра к ядру нерегулярно, то их связь с коллективными возбуждениями приводит лишь к флуктуативным эффектам. Существует, однако, тип возбуждений, который слабо зависит от индивидуальных характеристик ядер и связь которого с коллективной ветвью может приводить к систематическим поправкам. Наглядно этот тип возбуждений можно представить как колебания квадрупольных моментов нейтронов и протонов в противофазе друг к другу. Можно показать [4], что хотя энергия такого возбуждения порядка одночастичных, по существу это возбуждение коллективное (что проявляется, например, в усиленных $E2$-переходах из этого состояния). Связь данного типа возбуждений с рассмотренными выше коллективными усиливается, когда нейтроны и протоны заполняют разные половины оболочек ($\overline{\cos\vartheta_n \cos\vartheta_p} < 0$). В реальных ядрах состояние 2^+ рассматриваемого типа должно лежать несколько выше двухфононного состояния 2_2^+. Экспериментально их легко различить по величине $E2$-перехода в однофононное состояние 2_1^+ (в первом приближении переход из «противофазного» состояния запрещен).

7. Заключение

Проведенный микроскопический анализ позволяет значительно сократить число независимых феноменологических констант, необходимых для описания ангармонических поправок квадрупольных колебаний сферических ядер. Показано, что в адиабатическом приближении возмущение $H^{(1)}$, т. е. член в гамильтониане, содержащий три фононных оператора, определяется лишь одной константой Γ, а член с четырьмя фононными операторами $H^{(2)}$ содержит три константы, которые, однако, в асимптотическом приближении сводятся только к одной (γ). В принципе все эти константы могут быть вычислены для конкретных ядер. Хотя главные поправки по параметру адиабатичности дает $H^{(1)}$, однако практически $H^{(2)}$ может приводить к сравнимым или даже большим поправкам к энергетическим уровням. В то же время поправки от $H^{(1)}$ к волновым функциям (и, следовательно, к вероятностям переходов) могут быть более существенными. Следует заметить, что вероятности электромагнитных переходов значительно более чувствительны к виду ангармонических поправок, чем энергии уровней. К сожалению, в настоящее время экспериментальные данные о вероятностях переходов являются очень неполными и не достаточно точными для детального сравнения с теорией. Наиболее многочисленные и достоверные данные имеются для отношения вероятностей $B(E2;\ 2_2 \to 2_1)/B(E2;\ 2_2 \to 0_0)$. Если считать, что вся ангармоничность определяется членом $H^{(1)}$, то из (4.8) и (4.9) для указанного отношения получим

$$\frac{B(2_2 \to 2_1)}{B(2_2 - 0_0)} = \frac{9}{4\Gamma^2} = \frac{48}{7(\lambda_E - 2)}. \tag{7.1}$$

Аналогичная формула в модели неаксиального ротатора [8] имеет вид

$$\frac{B(2_2 \to 2_1)}{B(2_2 - 0_0)} = \frac{10}{7}\frac{\lambda_E(\lambda_E+1)(\lambda_E-1)}{\lambda_E - 2} \approx \frac{60}{7(\lambda_E - 2)}. \tag{7.2}$$

Различие между этими формулами незначительно. Выражение (7.1) в большинстве случаев дает правильную связь между отклонением уровней от эквидистантности и отношением вероятностей переходов [9], хотя в отдельных случаях расхождение довольно значительно и для его объяснения, видимо, требуется более детальный анализ поправок от $H^{(2)}$ и от связи с близкими одночастичными состояниями.

Поступила в редакцию
31 декабря 1961 г.

Литература

[1] A. Bohr, B. R. Mottelson. Mat. Fys. Medd. Kgl. Dan. Vid. Selsk., **27**, *16* 1953; пер. ПСФ, *9*, 34, 1955. G. Scharff-Goldhaber, J. Weneser. Phys. Rev., **98**, 212, 1955; пер. ПСФ, *1*, 125, 1956.
[2] S. T. Belyaev. Mat. Fys. Medd. Kgl. Dan. Vid. Selsk., **31**, *11*, 1959.
[3] С. Т. Беляев. ЖЭТФ, **39**, 1387, 1960.
[4] S. T. Belyaev, V. G. Zelevinsky. Nucl. Phys. (в печати).
[5] P. Anderson. Phys. Rev., **112**, 1900, 1959; пер. Теория сверхпроводимости, ИИЛ, 1960. T. Marumori. Progr. Theor. Phys. **24**, 331, 1960. M. Baranger. Phys. Rev., **120**, 957, 1960,
[6] A. R. Edmonds. Angular Momentum in Quantum Mechanics. Princeton University Press, 1957.
[7] K. Sawada. Phys. Rev., **106**, 372, 1957, пер. ПСФ, *1*, 47, 1958.
[8] А. С. Давыдов, Г. Ф. Филиппов. ЖЭТФ, **35**, 440, 1958.
[9] D. M. Van Patter. Nucl. Phys., **14**, 42, 1959.

«ANHARMONIC» EFFECTS OF QUADRUPOLE OSCILLATIONS OF SPHERICAL NUCLEI

S. T. Belyaev, V. G. Zelevinsky

Deviations from the fundamental harmonic approximation are considered in the microscopic theory of collective excitations of spherical even-even nuclei. It is shown that in a first approximation in the adiabacity parameter the «anharmonic» corrections can be expressed in terms of a single parameter. In this approximation corrections to the wave functions, shifts of energy levels and the probabilities for *E2*-transitions for the first two excited states are determined. Second approximation corrections which can also be expressed through a single parameter are considered.