Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 34 *1958* *Вып. 2*

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР НЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

С. Т. Беляев

Для системы взаимодействующих бозе-частиц в приближении малой плотности найдена одночастичная функция Грина, при помощи которой определяются энергетические уровни системы вблизи основного состояния (спектр квазичастиц).

1. Введение

В предыдущей статье [1] был развит метод функций Грина для бозе-системы многих частиц и получено выражение для одночастичной функции Грина через эффективные потенциалы парного взаимодействия между частицами Σ_{ik} и химический потенциал системы μ. Для определения Σ_{ik} и μ необходимы приближенные методы. В настоящей работе рассматривается «газовое» приближение, в котором малым параметром является плотность n (отношение объема, занятого частицами, ко всему объему). Взаимодействие между частицами предполагается центральным и короткодействующим, но не обязательно слабым. Первые два приближения выражаются через амплитуды рассеяния f двухчастичной задачи. Но уже в следующем приближении ($\sim(\sqrt{nf^3})^2$) появляется необходимость учитывать трехчастичные амплитуды, что практически исключает возможность дальнейших приближений.

Из полученного выражения для функции Грина определяется энергетический спектр возбуждений (квазичастиц), а также энергия основного состояния и распределение в нем частиц по импульсам.

2. Оценка графиков, входящих в эффективные потенциалы

Определение величин Σ_{ik} и μ, а также правила построения фейнмановских графиков были сформулированы в работе [1] (ниже обозначаемой I).

Оценим различные графики, дающие вклад в Σ_{ik} и μ, пользуясь теорией возмущений. При этом для фурье-компоненты потенциала $U(\mathbf{p}) \equiv U_{\mathbf{p}}$ примем для простоты: $U_{\mathbf{p}} = U_0$ для $p < 1/a$ и $U_{\mathbf{p}} = 0$ для $p > 1/a$, где a по порядку величины есть радиус частицы [1].

Для определенности будем рассматривать Σ_{20}, графики для Σ_{02}, Σ_{11} и μ по существу аналогичны. В первом приближении теории возмущений, как было найдено в (I, 7), $\Sigma_{20}^{(1)} = n_0 U_{\mathbf{p}}$; $\mu = n_0 U_0$.

В оценку любого графика могут войти три параметра, фигурирующие в задаче: U_0 и a, характеризующие взаимодействие, и n_0 — плотность частиц конденсата. Из этих трех параметров можно образовать две безразмерные комбинации:

$$\xi = U_0/a; \qquad \beta = \sqrt{n_0 a^3}. \tag{2.1}$$

Величина ξ есть обычный параметр теории возмущений (в обычных единицах $\xi \sim m U(r) a^2/\hbar^2$), а β — «газовый» параметр.

---

[1] p, q . . . будут употребляться как для обозначения длины 3-векторов, так и как символы 4-векторов. Это не может вызвать недоразумений, так как в последнем смысле p, q. . . употребляются лишь как аргументы в $G(p)$, $\Sigma(p)$ и т. д.

Единственный не равный нулю график второго приближения изображен на рис. 1, *a*. Для него находим

$$M_a \sim n_0 \int G^0(q+\mu)\, G^0(-q+\mu)\, U_0 U_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} d^4q$$

или, подставляя значение

$$G^0(p) = (p^0 - \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 + i\delta)^{-1}, \qquad \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 = p^2/2, \qquad \delta \to +0 \tag{2.2}$$

и интегрируя по q^0, получим

$$M_a \sim n_0 U_0^2 \int\limits_{qa<1} d\mathbf{q} \int \frac{dq^0}{(q^0+\mu-\varepsilon_{\mathbf{q}}^0+i\delta)(-q^0+\mu-\varepsilon_{\mathbf{q}}^0+i\delta)} \sim n_0 U_0^2 \int\limits_{qa<1} d\mathbf{q}\, \frac{1}{\mu-\varepsilon_{\mathbf{q}}^0+i\delta}\,.$$

В последнем интеграле играют роль большие $q \sim 1/a$, при которых $\mu/\varepsilon^0 \sim n_0 U_0 a^2 = \xi\beta^2 \ll 1$, так что

$$M_a \sim n_0 U_0^2 / a = \Sigma_{20}^{(1)} \xi. \tag{2.3}$$

Рассмотрим теперь график третьего порядка 1,*b*. Для него получаем

$$M_b \sim n_0^2 \int G^0(q+\mu)\,[G^0(-q+\mu)]^2\, U_0 U_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} d^4q \sim$$
$$\sim n_0^2 U_0^3 \int d\mathbf{q}\,/(\mu - \varepsilon_{\mathbf{q}}^0 + i\delta)^2.$$

Последний интеграл, в отличие от предыдущего случая, сходится на верхнем пределе и в нем главную роль играет область $q \sim \sqrt{\mu} = \sqrt{n_0 U_0}$, так что

$$M_b \sim n_0^2 U_0^3 / \sqrt{\mu} = \Sigma_{20}^{(1)} \xi^{3/2} \beta. \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) видно, что $M_b / M_a \sim \xi^{1/2}\beta$. Это явилось следствием того факта, что M_a содержит интеграл от произведения двух G^0, формально расходящийся на верхнем пределе, тогда как в M_b интегрируются три G^0 и интеграл сходится без обрезания. На графиках это отличие состоит в числе сплошных линий в замкнутой петле (образованной сплошными и пунктирными линиями). Полученный результат справедлив и в том случае, когда петли являются частью более сложного графика.

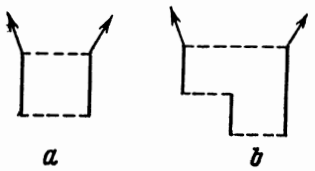

Рис. 1

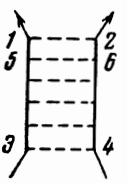

Рис. 2

Таким образом, каждая петля с числом сплошных линий больше двух вносит малый параметр β, петли же с двумя сплошными линиями не содержат β. В низшем приближении надо учесть поэтому графики с петлями только второго рода. Все такие графики принадлежат к «лестничному» типу (рис. 2). Назовем совокупность таких графиков — $i\Gamma(12;\ 34)$. Первое приближение по β отличается, таким образом, от первого приближения теории возмущений заменой потенциала U (одна «перекладина» «лестницы») на Γ (совокупность всевозможных лестниц). Аналогичный результат мы получим и для высших приближений: суммирование всех графиков, отличающихся только числом «лестничных» петель, приводит к замене U на Γ. Изображая Γ прямоугольником, можно все графики строить сразу из прямоугольников и сплошных линий. Потенциал U, таким образом, исключается из задачи. Роль эффективного потенциала играет Γ.

3. Уравнение для эффективного потенциала Г [2]

Для совокупности членов, представленных графиками «лестничного» типа (рис. 2), можно, очевидно, написать интегральное уравнение

$$\Gamma(12;34) = U(1-2)\,\delta(1-3)\,\delta(2-4) + \\ + i\int U(1-2)\,G^0(1-5)\,G^0(2-6)\,\Gamma(56;34)\,d^4x_5 d^4x_6. \qquad (3.1)$$

(Обозначения те же, что и в I). Перейдем в (3.1) к импульсному представлению. (Чтобы не усложнять формулы множителями 2π везде в дальнейшем полагаем

$$d^4p = (2\pi)^{-4} dp^1 dp^2 dp^3 dp^0;\ \delta(p) = (2\pi)^4\,\delta(p^1)\,\delta(p^2)\,\delta(p^3)\,\delta(p^0),$$

а для $d\mathbf{p}$ и $\delta(\mathbf{p})$ аналогичные выражения с множителем $(2\pi)^3$). Полагая

$$\Gamma(p_1p_2;\ p_3p_4)\,\delta(p_1+p_2-p_3-p_4) = \int \exp\{-ip_1x_1 - ip_2x_2 + ip_3x_3 + \\ + ip_4x_4\}\,\Gamma(12;34)\,d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4, \qquad (3.2)$$

а затем вводя относительные и суммарные импульсы

$$p_1 + p_2 = P';\ p_3 + p_4 = P;\ p_1 - p_2 = 2p',\ p_3 - p_4 = 2p, \qquad (3.3)$$

получим для $\Gamma(p';\ p;\ P) \equiv \Gamma(p_1p_2;\ p_3p_4)$ из (3.1)

$$\Gamma(p';p;P) = U(p'-p) + i\int d^4q\,U(p'-q)\,G^0(P/2+q)\times \\ \times G^0(P/2-q)\,\Gamma(q;p;P). \qquad (3.4)$$

Так как взаимодействие U незапаздывающее, то $U(1-2) = U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\times$ $\times\delta(t_1 - t_2)$ и, следовательно, в $\Gamma(12;34)$ точки 1,2 и 3,4 одновременны. В импульсном представлении этот факт означает, что $\Gamma(p_1p_2;\ p_3p_4)$ зависит только от одной комбинации четвертых компонент $p_1^0 + p_2^0 = p_3^0 + p_4^0 = P^0$ и поэтому $\Gamma(p';p;P)$ не зависит от четвертых компонент первых двух аргументов (относительных импульсов). Это позволяет выполнить в (3.4) интегрирование по q^0:

$$\int dq^0 G^0\left(\frac{1}{2}P + q\right) G^0\left(\frac{1}{2}P - q\right) = -i\left(P^0 - \frac{1}{4}\mathbf{P}^2 - \mathbf{q}^2 + i\delta\right)^{-1}, \qquad (3.5)$$

после чего (3.4) принимает вид

$$\Gamma(\mathbf{p}';\mathbf{p};P) = U(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) + \int d\mathbf{q}\,\frac{U(\mathbf{p}'-\mathbf{q})\,\Gamma(\mathbf{q};\mathbf{p};P)}{k_0^2 - q^2 + i\delta};\ k_0^2 = P^0 - \frac{1}{4}\mathbf{P}^2. \qquad (3.6)$$

Уравнение (3.6) нельзя решить в общем виде, но его решение можно выразить через амплитуду рассеяния двухчастичной задачи в пустоте. Если ввести величину $\chi(\mathbf{q}) = (k_0^2 - q^2 + i\delta)^{-1}\,\Gamma(\mathbf{q};\mathbf{p};P)$, то для нее из (3.6) следует

$$(k_0^2 - p'^2)\,\chi(\mathbf{p}') - \int U(\mathbf{p}'-\mathbf{q})\,\chi(\mathbf{q})\,d\mathbf{q} = U(\mathbf{p}'-\mathbf{p}). \qquad (3.7)$$

Пусть $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}')$ — нормированные функции, удовлетворяющие уравнению

$$(k^2 - p'^2)\,\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') - \int U(\mathbf{p}'-\mathbf{q})\,\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})\,d\mathbf{q} = 0, \qquad (3.8)$$

[2] Вопросы, связанные с Г, решались совместно с В. М. Галицким, работавшим одновременно над аналогичными проблемами для ферми-системы.

тогда решение (3.7) может быть записано в виде

$$\chi(\mathbf{p}') = \int \frac{\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}')\,\Psi_{\mathbf{k}}^{*}(\mathbf{q})}{k_0^2 - k^2 + i\delta}\, U(\mathbf{q}-\mathbf{p})\, d\mathbf{q},$$

откуда для $\Gamma(\mathbf{p}';\mathbf{p};P)$ находим

$$\Gamma(\mathbf{p}';\mathbf{p};P) = (k_0^2 - p'^2)\int \frac{\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}')\,\Psi_{\mathbf{k}}^{*}(\mathbf{q})}{k_0^2 - k^2 + i\delta}\, U(\mathbf{q}-\mathbf{p})\, d\mathbf{q}. \qquad (3.9)$$

Заметим теперь, что (3.8) является уравнением Шредингера в импульсном представлении и, следовательно, $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})$ имеет смысл волновой функции задачи рассеяния в потенциале U. Амплитуда рассеяния $f(\mathbf{p}'\mathbf{p})$ связана с Ψ-функцией соотношением [3]

$$f(\mathbf{p}'\mathbf{p}) = \int e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}}\, U(\mathbf{r})\, \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int U(\mathbf{p}'-\mathbf{q})\, \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})\, d\mathbf{q}, \qquad (3.10)$$

или

$$\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}') = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') + f(\mathbf{p}'\mathbf{p})/(p^2 - p'^2 + i\delta). \qquad (3.11)$$

В первом равенстве (3.10) $\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ — волновая функция в координатном представлении, имеющая на бесконечности вид плоской волны с импульсом $\mathbf{p}$ и расходящейся волны. Обычно под амплитудой понимают значение $f(\mathbf{p}'\mathbf{p})$ при $p = p'$. Мы будем рассматривать произвольные аргументы, считая (3.10) определением амплитуды $f(\mathbf{p}'\mathbf{p})$ для всех значений $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$.

Из условий ортогональности $\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}')$ по обоим аргументам для $f(\mathbf{p}'\mathbf{p})$ следует

$$f(\mathbf{p}'\mathbf{p}) - f^{*}(\mathbf{p}'\mathbf{p}) = \int d\mathbf{q} f(\mathbf{p}'\mathbf{q})\, f^{*}(\mathbf{p}\mathbf{q})\left[\frac{1}{q^2 - p'^2 + i\delta} - \frac{1}{q^2 - p^2 - i\delta}\right] =$$
$$= \int d\mathbf{q} f^{*}(\mathbf{q}\mathbf{p}')\, f(\mathbf{q}\mathbf{p})\left[\frac{1}{q^2 - p'^2 + i\delta} - \frac{1}{q^2 - p^2 - i\delta}\right]. \qquad (3.12)$$

В частном случае $\mathbf{p}' = \pm\mathbf{p}$ из (3.12) определяется мнимая часть амплитуды рассеяния вперед (назад). Используя очевидное соотношение $f(-\mathbf{p}'-\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}'\mathbf{p})$, получаем из (3.12)

$$\operatorname{Im} f(\pm\mathbf{p}\mathbf{p}) = -i\pi \int d\mathbf{q} f(\mathbf{p}\mathbf{q})\, f^{*}(\pm\mathbf{p}\mathbf{q})\, \delta(q^2 - p^2). \qquad (3.13)$$

(Для амплитуды рассеяния вперед (3.13) дает известную связь ее мнимой части с полным сечением σ: $\operatorname{Im} f(\mathbf{p}\mathbf{p}) = -ip\sigma$.)

Подставляя (3.11) в (3.9) и используя (3.12), получим для $\Gamma(p';p;P)$ два эквивалентных выражения

$$\Gamma(\mathbf{p}';\mathbf{p};P) = f(\mathbf{p}'\mathbf{p}) + \int d\mathbf{q} f(\mathbf{p}'\mathbf{q})\, f^{*}(\mathbf{p}\mathbf{q})\left[\frac{1}{k_0^2 - q^2 + i\delta} + \frac{1}{q^2 - p^2 - i\delta}\right] =$$
$$= f^{*}(\mathbf{p}\mathbf{p}') + \int d\mathbf{q} f(\mathbf{p}'\mathbf{q})\, f^{*}(\mathbf{p}\mathbf{q})\left[\frac{1}{k_0^2 - q^2 + i\delta} + \frac{1}{q^2 - p'^2 + i\delta}\right]. \qquad (3.14)$$

(3.14) дает выражение эффективного потенциала $\Gamma(\mathbf{p}';\mathbf{p};P)$ через амплитуды рассеяния двухчастичной задачи в пустоте.

---

[3] Величина $f(\mathbf{p}'\mathbf{p})$ отличается множителем от обычно определяемой амплитуды $a(\mathbf{p}'\mathbf{p})$, а именно: $f = -4\pi a$.

4. Функция Грина первого приближения

Эффективные потенциалы Σ_{ik} определяются частными значениями Γ, когда две из четырех участвующих в процессе частиц принадлежат конденсату, т. е. имеют $\mathbf{p}=0$; $p^0=\mu$. Принимая также во внимание, что каждая конденсатная частица вносит дополнительный множитель $\sqrt{n_0}$, найдем

$$\Sigma_{20}(p+\mu)=n_0\Gamma(\mathbf{p};0;2\mu);\ \Sigma_{02}(p+\mu)=n_0\Gamma(0;\mathbf{p};2\mu),$$
$$\Sigma_{11}(p+\mu)=n_0\Gamma(\mathbf{p}/2;\mathbf{p}/2;p+2\mu)+n_0\Gamma(-\mathbf{p}/2;\mathbf{p}/2;p+2\mu). \tag{4.1}$$

Для получения химического потенциала следует все частицы в Γ считать конденсатными («вакуумная петля»), но общую степень n_0 уменьшить на единицу (см. I,3.20). Таким образом, получим

$$\mu=n_0\Gamma(0;0;2\mu). \tag{4.2}$$

Подставляя в (4.1) и (4.2) значения Γ из (3.14), найдем

$$\begin{aligned}
\mu &= n_0 f(00)+n_0\int d\mathbf{q}\,|f(0\mathbf{q})|^2\left[\frac{1}{2\mu-q^2+i\delta}+\frac{1}{q^2}\right],\\
\Sigma_{20}(p+\mu) &= n_0 f(\mathbf{p}0)+n_0\int d\mathbf{q} f(\mathbf{pq})f^*(0\mathbf{q})\left[\frac{1}{2\mu-q^2+i\delta}+\frac{1}{q^2}\right],\\
\Sigma_{02}(p+\mu) &= n_0 f^*(\mathbf{p}0)+n_0\int d\mathbf{q} f(0\mathbf{q})f^*(\mathbf{pq})\left[\frac{1}{2\mu-q^2+i\delta}+\frac{1}{q^2}\right],\\
\Sigma_{11}(p+\mu) &= 2n_0 f_s\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\frac{\mathbf{p}}{2}\right)+2n_0\int d\mathbf{q}\left|f_s\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\mathbf{q}\right)\right|^2\left[\frac{1}{p^0+2\mu-p^2/4-q^2+i\delta}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{q^2-p^2/4-i\delta}\right].
\end{aligned} \tag{4.3}$$

В последнем выражении введена симметризованная амплитуда

$$f_s(\mathbf{p}'\mathbf{p})=[f(\mathbf{p}'\mathbf{p})+f(-\mathbf{p}'\mathbf{p})]/2.$$

Все интегралы в (4.3) сходятся при больших импульсах даже если считать амплитуды константами, так что из соображений размерности эти члены имеют порядок $n_0 f^2\sqrt{\mu}$, т. е. по сравнению с первыми членами в (4.3) лишний множитель $\sqrt{n_0 f^3}$ — «газовый» параметр (2.1), в котором роль радиуса частицы играет теперь амплитуда f. Опуская в первом приближении интегральные члены в (4.3), получаем

$$\mu=n_0 f(00);\ \Sigma_{20}(p+\mu)=\Sigma_{02}^*(p+\mu)=n_0 f(\mathbf{p}0);$$
$$\Sigma_{11}^{\pm}\equiv\Sigma_{11}(\pm p+\mu)=2n_0 f_s\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\frac{\mathbf{p}}{2}\right). \tag{4.4}$$

Функция Грина G, согласно (I, 5.6), равна

$$G(p+\mu)=\frac{p^0+\varepsilon_{\mathbf{p}}^0+\Sigma_{11}^{-}-\mu}{[p^0-(\Sigma_{11}^{+}-\Sigma_{11}^{-})/2]^2-[\varepsilon_{\mathbf{p}}^0+(\Sigma_{11}^{+}+\Sigma_{11}^{-})/2-\mu]^2+\Sigma_{20}\Sigma_{02}+i\delta} \tag{4.5}$$

и после подстановки (4.4) принимает вид

$$G(p+\mu)=\frac{p^0+\varepsilon^0+2n_0 f_s\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\frac{\mathbf{p}}{2}\right)-n_0 f(00)}{p^{02}-\varepsilon_{\mathbf{p}}^2+i\delta}, \tag{4.6}$$

где

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\left[\varepsilon_{\mathbf{p}}^0 + 2n_0 f_s\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\frac{\mathbf{p}}{2}\right) - n_0 f(00)\right]^2 - n_0^2 |f(\mathbf{p}0)|^2}. \qquad (4.7)$$

Значение $p^0(\mathbf{p})$ в полюсе функции Грина $G(p+\mu)$ определяет энергию $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ элементарных возбуждений (квазичастиц) с импульсом $\mathbf{p}$ [2]. Для определения $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ нужно знать три различные амплитуды. $f_s\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\frac{\mathbf{p}}{2}\right)$ является обычной симметризованной амплитудой рассеяния вперед, $f(00)$ — ее частное значение. Величина же $f(\mathbf{p}0)$ не имеет наглядного смысла в двухчастичной задаче, так как описывает процесс, запрещенный для двух частиц в пустоте.

При малых импульсах зависимостью $f_s\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\frac{\mathbf{p}}{2}\right)$ и $f(\mathbf{p}0)$ от $\mathbf{p}$ можно пренебречь и положить $f_s\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\frac{\mathbf{p}}{2}\right) \approx f(\mathbf{p}0) \approx f(00) \equiv f_0$. Такое приближение справедливо, если длина волны больше характерных размеров области взаимодействия, которая по порядку величины определяется амплитудой рассеяния f_0. Таким образом, при $p < f_0^{-1}$ можно считать все амплитуды в (4.6) и (4.7) константами. Для более высоких возбуждений с $p \gtrsim f_0^{-1}$ существенна зависимость амплитуд от импульса, так что задача не может быть рассмотрена в общем виде. Высокие возбуждения будут рассмотрены на частном примере упругих шаров (см. раздел 8).

Ограничиваясь случаем $pf_0 < 1$, находим из (4.6) и (4.7)

$$G(p+\mu) = (p^0 + \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 + n_0 f_0)/(p^{02} - \varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + i\delta), \qquad (4.8)$$

где

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^{02} + 2n_0 f_0 \varepsilon_p^0}. \qquad (4.9)$$

(4.8) и (4.9) по виду совпадают с аналогичными выражениями, полученными по теории возмущений (I, 7.3; 7.4), но вместо фурье-компоненты потенциала $U_{\mathbf{p}}$ теперь входит амплитуда рассеяния f_0.

Как следует из (4.9), квазичастицы при $p \ll \sqrt{n_0 f_0}$ имеют звуковую дисперсию $\varepsilon_{\mathbf{p}} \approx p\sqrt{n_0 f_0}$, а при $p \gg \sqrt{n_0 f_0}$ переходят в «почти свободные» частицы с $\varepsilon_p \approx \varepsilon_p^0 + n_0 f_0$. (Такой вид спектра возникает при рассмотрении частицы, движущейся в сплошной среде с некоторым коэффициентом преломления.) Переход между областью фононов и областью свободных частиц происходит при $p \sim \sqrt{n_0 f_0} \ll 1/f_0$, так что обе области законно рассматривать в приближении постоянных амплитуд.

Отметим, что неравенства $\sqrt{n_0 f_0^3} \ll 1$ и $pf_0 \ll 1$ фактически связаны между собой. Если ограничиваться импульсами p, не сильно превышающими $\sqrt{n_0 f_0}$, то второе условие является следствием первого. Поэтому пренебрегая величинами $\sim \sqrt{n_0 f_0^3}$, мы обязаны считать амплитуды константами.

В (I,5) была введена величина $\hat{G}(p+\mu)$, аналог функции Грина G, но не с одним выходящим свободным концом, а с двумя входящими концами. Аналогичную величину с двумя выходящими концами обозначим $\check{G}(p+\mu)$. Нетрудно видеть, что она получается из $\hat{G}(p+\mu)$ заменой Σ_{02} на Σ_{20}. Согласно (I,5.7) и (4.4) получаем в приближении постоянных амплитуд

$$\hat{G}(p+\mu) = \check{G}(p+\mu) = -n_0 f_0/(p^{02} - \varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + i\delta). \qquad (4.10)$$

5. Второе приближение для функции Грина

Во втором приближении в Σ_{ik} и μ нужно учесть величины порядка $\sqrt{n_0 f_0^3}$. Согласно сказанному в конце предыдущего раздела, одновременно следует учитывать члены порядка pf_0 в амплитудах. Действительная часть амплитуды разлагается только по четным степеням p, а мнимая часть — только по нечетным, поэтому член порядка pf_0 определяет в низшем приближении мнимую часть амплитуды. Мнимая часть $f_s\left(\frac{\mathbf{p}}{2}-\frac{\mathbf{p}}{2}\right)$ опреде-

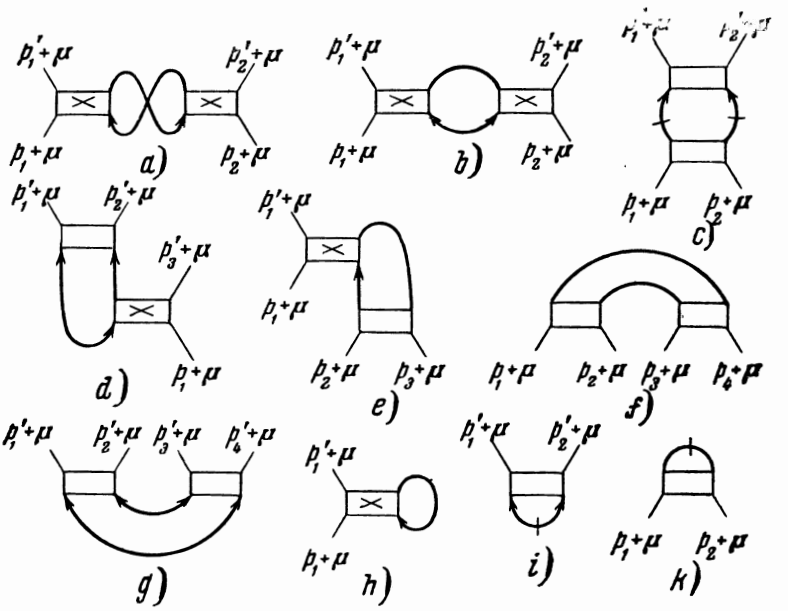

Рис 3.

ляется из (3.13), а амплитуда $f(\mathbf{p}0)$ действительна, что легко увидеть из определения (3.10) (к тому же в рассматриваемом приближении входит только квадрат ее модуля).

Члены порядка $\sqrt{n_0 f_0^3}$ от графиков первого приближения определяются интегральными выражениями в (4.3). В них, как и в интеграле (3.13), можно считать амплитуды константами. Как было выяснено в разделе 2, тот же порядок имеют графики, содержащие петлю с тремя или более сплошными линиями. Нетрудно видеть, что суммирование графиков, отличающихся только числом сплошных линий в петле, приведет к замене функций Грина нулевого приближения G^0 на G, $\hat{G}$ или $\check{G}$ первого приближения. Можно поэтому сразу рассматривать петли, образованные из G, $\hat{G}$, $\check{G}$ и Γ. Всего можно сконструировать десять существенно различных петель (рис. 3). Прямоугольники с крестом обозначают сумму двух прямоугольников для обменного и необменного взаимодействия (отличающихся взаимным расположением верхних и нижних концов) и соответствуют $-i[\Gamma(12;\ 34)+\Gamma(12;\ 43)]$ или в импульсном представлении $-i[\Gamma(\mathbf{p}';\ \mathbf{p};\ P)+\Gamma(-\mathbf{p}';\ \mathbf{p};\ P)]$. Если разлагать G, $\hat{G}$ и $\check{G}$ по степеням эффективного потенциала Γ, то в низшем приближении графики 3, *c*, *i*, *k* будут представлены петлей с двумя сплошными линиями. Но все такие петли уже учтены в Γ и поэтому должны быть исключены. Это условно обозначено на рис. 3 штрихами у сплошных линий. Вводя для графиков рис. 3 обозначения $-iF_{a,b}\ldots(p_1', \ldots, p_1\ldots)$, найдем в

приближении постоянных амплитуд:

$$F_a(p_1'p_2';\ p_1p_2) = i4f_0^2\int G(q+\mu)\,G(p_1-p_1'+q+\mu)\,d^4q;$$

$$F_b = i4f_0^2\int \hat{G}(q+\mu)\,\check{G}(p_1-p_1'+q+\mu)\,d^4q;$$

$$F_c = if_0^2\int\{G(q+\mu)\,G(p_1+p_2-q+\mu) - G^0(q+\mu)\,G^0(p_1+p_2-q+\mu)\}\,d^4q;$$

$$F_d = i2f_0^2\int \hat{\hat{G}}(q+\mu)\,G(p_2'+p_3'-q+\mu)\,d^4q,$$

$$F_e = i2f_0^2\int \check{G}(q+\mu)\,G(p_1'+p_2'-q+\mu)\,d^4q;$$

$$F_f = if_0^2\int \hat{G}(q+\mu)\,\hat{G}(p_1+p_2-q+\mu)\,d^4q; \qquad (5.1)$$

$$F_g = if_0^2\int \check{G}(q+\mu)\,\check{G}(p_1'+p_2'-q+\mu)\,d^4q;\quad F_h = i2f_0\int G(q+\mu)\,d^4q;$$

$$F_i = if_0\int\{\check{G}(q+\mu) - n_0f_0G^0(q+\mu)\,G^0(-q+\mu)\}\,d^4q;$$

$$F_k = if_0\int\{\hat{G}(q+\mu) - n_0f_0G^0(q+\mu)\,G^0(-q+\mu)\}\,d^4q.$$

(Везде предполагаются выполненными законы сохранения $\Sigma p = \Sigma p'$. Интегрирование по q^0 в F_h производится с замыканием в верхнюю полуплоскость, так как соответствующий график при $G \to G^0$ должен исчезать.) В правых частях (5.1) вместо μ следует подставить значение первого приближения $\mu^{(1)} = n_0f_0$.

В Σ_{ik} входят частные значения F (с множителями $\sqrt{n_0}$ для каждой конденсатной частицы):

$$\Sigma_{20}'(p+\mu) = n_0F_a(p-p;\ 00) + n_0F_b(p-p;\ 00) + n_0F_e(p0-p;\ 0) +$$
$$+ n_0F_e(0p-p;\ 0) + n_0F_e(-p0p;\ 0) +$$
$$+ n_0F_e(0-pp;\ 0) + n_0F_g(p0-p0;) + n_0F_g(p00-p;) + F_i(p-p;);$$
$$\Sigma_{02}'(p+\mu) = n_0F_a(00;\ p-p) + n_0F_b(00;\ p-p) + n_0F_d(0;\ p-p0) +$$
$$+ n_0F_d(0;\ p0-p) + n_0F_d(0;\ -pp0) + n_0F_d(0;\ -p0p) +$$
$$+ n_0F_f(;\ p0-p0) + n_0F_f(;\ p00-p) + F_k(;\ p-p); \qquad (5.2)$$
$$\Sigma_{11}'(p+\mu) = n_0F_a(p0;\ 0p) + n_0F_b(p0;\ 0p) + n_0F_c(p0;\ p0) + n_0F_c(p0;\ 0p) +$$
$$+ n_0F_d(p;\ 0p0) + n_0F_d(p;\ 00p) + n_0F_e(p00;\ p) + n_0F_e(0p0;\ p) + F_h(p;\ p).$$

Для того чтобы отобрать вакуумные петли, входящие в μ, следует (I,4) предварительно выделить одну выходящую (или входящую) конденсатную частицу. После этого следует суммировать петли, различные как по геометрической структуре, так и по месту выделенной частицы. Вакуумные петли включают прямоугольники трех типов, отличающиеся числом входящих и выходящих сплошных линий ($\Sigma_{11}^{(1)}$, $\Sigma_{02}^{(1)}$ или $\Sigma_{20}^{(1)}$). Выделенная конденсатная частица может выходить либо из $\Sigma_{11}^{(1)}$, либо из $\Sigma_{02}^{(1)}$. Совокупность всех графиков первого типа равна $-iF_h(0;\ 0)$, тогда как $-iF_i(00;)$ дает сумму всех графиков второго типа (конденсатная частица выходит из $\Sigma_{02}^{(1)}$). Таким образом, вклад рассматриваемых петель в μ равен

$$\mu' = F_h(0;\ 0) + F_i(00;). \qquad (5.3)$$

При интегрировании в (5.1) по q^0 удобно представить G и $\hat{G} = \check{G}$ в следующем виде

$$G(q+\mu) = \frac{A_{\mathbf{q}}}{q^0-\varepsilon_{\mathbf{q}}+i\delta} - \frac{B_{\mathbf{q}}}{q^0+\varepsilon_{\mathbf{q}}-i\delta};$$

$$\hat{G} = \check{G}(q+\mu) = -C_{\mathbf{q}}\left[\frac{1}{q^0-\varepsilon_{\mathbf{q}}+i\delta} - \frac{1}{q^0+\varepsilon_{\mathbf{q}}-i\delta}\right], \qquad (5.4)$$

где

$$A_{\mathbf{q}} = (\varepsilon_{\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{q}}^0 + n_0 f_0)/2\varepsilon_{\mathbf{q}};$$

$$B_{\mathbf{q}} = (-\varepsilon_{\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{q}}^0 + n_0 f_0)/2\varepsilon_{\mathbf{q}} = n_0^2 f_0^2/2\varepsilon_{\mathbf{q}}(\varepsilon_{\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{q}}^0 + n_0 f_0);\ C_{\mathbf{q}} = n_0 f_0/2\varepsilon_{\mathbf{q}} \quad (5.5)$$

и зависят только от $|\mathbf{q}|$. Производя в (5.1) интегрирование по q^0, из (5.2) и (5.3) после несложных преобразований получаем

$$\Sigma'_{02\,(20)}(p+\mu) = 2n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q}\,[(A_{\mathbf{q}};\ B_{\mathbf{k}}) - (A_{\mathbf{q}} + B_{\mathbf{q}};\ C_{\mathbf{k}}) + 3C_{\mathbf{q}}C_{\mathbf{k}}] \times$$
$$\times \left(\frac{1}{p^0 - \varepsilon_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} + i\delta} - \frac{1}{p^0 + \varepsilon_{\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{k}} - i\delta}\right) - f_0 \int d\mathbf{q}\left\{C_{\mathbf{q}} + \frac{n_0 f_0}{2n_0 f_0 - 2\varepsilon_{\mathbf{q}}^0 + i\delta}\right\},$$

$$\Sigma'_{11}(p+\mu) = 2n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q}\left\{\frac{(A_{\mathbf{q}};\ B_{\mathbf{k}}) + 2C_{\mathbf{q}}C_{\mathbf{k}} + A_{\mathbf{q}}A_{\mathbf{k}} - 2(A_{\mathbf{q}};\ C_{\mathbf{k}})}{p^0 - \varepsilon_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} + i\delta} -\right.$$
$$\left. - \frac{(A_{\mathbf{q}};\ B_{\mathbf{k}}) + 2C_{\mathbf{q}}C_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{q}}B_{\mathbf{k}} - 2(B_{\mathbf{q}};\ C_{\mathbf{k}})}{p^0 + \varepsilon_{\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{k}} - i\delta} - \frac{1}{p^0 + 2n_0 f_0 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^0 - \varepsilon_{\mathbf{k}}^0 + i\delta}\right\} + 2f_0 \int d\mathbf{q}\, B_{\mathbf{q}},$$

$$\mu' = 2f_0 \int d\mathbf{q}\, B_{\mathbf{q}} - f_0 \int d\mathbf{q}\left\{C_{\mathbf{q}} + \frac{n_0 f_0}{2n_0 f_0 - 2\varepsilon_{\mathbf{q}}^0 + i\delta}\right\}, \quad (5.6)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$, а символ (;) означает симметризацию: $(A_{\mathbf{q}};\ B_{\mathbf{k}}) = A_{\mathbf{q}}B_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{q}}A_{\mathbf{k}}$ (подынтегральные выражения для удобства симметризованы по $\mathbf{q}$ и $\mathbf{k}$).

Прежде чем прибавить к (5.6) члены второго порядка из (4.2), преобразуем несколько выражение для Σ_{11} в (4.3). Замечая, что

$$q^2 + p^2/4 = \varepsilon^0_{\mathbf{p}/2+\mathbf{q}} + \varepsilon^0_{\mathbf{p}/2-\mathbf{q}}$$

и вводя новую переменную интегрирования $\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \mathbf{p}/2$, получим в рассматриваемом приближении вместо (4.3)

$$\Sigma_{11}(p+\mu) = 2n_0 f_0 + 2n_0 \operatorname{Im} f_s\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\frac{\mathbf{p}}{2}\right) +$$
$$+ 2n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q}\left[\frac{1}{p^0 + 2n_0 f_0 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^0 - \varepsilon_{\mathbf{k}}^0 + i\delta} - \frac{1}{\varepsilon_p^0 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^0 - \varepsilon_{\mathbf{k}}^0 + i\delta}\right]. \quad (5.7)$$

Из (5.6), (4.3) и (5.7) после некоторых преобразований найдем для совокупности всех членов второго порядка

$$\mu^{(2)} = 2f_0 \int d\mathbf{q}\, B_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q}\left(\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{q}}^0} - \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{q}}}\right),$$

$$\Sigma^{(2)}_{20\,(02)}(p+\mu) = 2n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q}\,[(A_{\mathbf{q}};\ B_{\mathbf{k}}) - (A_{\mathbf{q}} + B_{\mathbf{q}};\ C_{\mathbf{k}}) + 3C_{\mathbf{q}}C_{\mathbf{k}}] \times$$
$$\times \left(\frac{1}{p^0 - \varepsilon_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} + i\delta} - \frac{1}{p^0 + \varepsilon_{\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{k}} - i\delta}\right) + \frac{1}{2} n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q}\left(\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{q}}^0} - \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{q}}}\right);$$

$$\Sigma^{(2)}_{11}(p+\mu) = 2n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q}\left\{\frac{(A_{\mathbf{q}};\ B_{\mathbf{k}}) + 2C_{\mathbf{q}}C_{\mathbf{k}} + A_{\mathbf{q}}A_{\mathbf{k}} - 2(A_{\mathbf{q}};\ C_{\mathbf{k}})}{p^0 - \varepsilon_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} + i\delta} -\right. \quad (5.8)$$
$$\left. - \frac{(A_{\mathbf{q}};\ B_{\mathbf{k}}) + 2C_{\mathbf{q}}C_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{q}}B_{\mathbf{k}} - 2(B_{\mathbf{q}};\ C_{\mathbf{k}})}{p^0 + \varepsilon_{\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{k}} - i\delta} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{q}}} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}}\right)\right\} + 2f_0 \int d\mathbf{q}\, B_{\mathbf{q}} +$$
$$+ 2n_0 \operatorname{Im} f_s\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\frac{\mathbf{p}}{2}\right) - 2n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q}\left[\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}}^0 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^0 - \varepsilon_{\mathbf{k}}^0 + i\delta} + \frac{1}{4\varepsilon_{\mathbf{q}}} + \frac{1}{4\varepsilon_{\mathbf{k}}}\right].$$

Находя $\operatorname{Im} f_s\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\,\frac{\mathbf{p}}{2}\right)$ из (3.13) и подставляя значения интегралов, не содержащих p^0 (которые вычисляются точно), находим

$$\Sigma^{(2)}_{20(02)}(p+\mu) = \frac{1}{2}\,n_0 f_0^2 \int \frac{dq}{\varepsilon_q \varepsilon_k}\,R(qk)\left[\frac{1}{p^0-\varepsilon_q-\varepsilon_k+i\delta} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{p^0+\varepsilon_q+\varepsilon_k-i\delta}\right] + \frac{1}{\pi^2}\sqrt{n_0 f_0^3}\,n_0 f_0, \tag{5.9}$$

$$\Sigma^{(2)}_{11}(p+\mu) = \frac{1}{2}\,n_0 f_0^2 \int \frac{dq}{\varepsilon_q \varepsilon_k}\left[\frac{Q^-(qk)}{p^0-\varepsilon_q-\varepsilon_k+i\delta} - \right.$$
$$\left. - \frac{Q^+(qk)}{p^0+\varepsilon_q+\varepsilon_k-i\delta} + \varepsilon_q + \varepsilon_k\right] + \frac{8}{3\pi^2}\sqrt{n_0 f_0^3}\,n_0 f_0, \tag{5.10}$$

$$\mu^{(2)} = (5/3\pi^2)\sqrt{n_0 f_0^3}\cdot n_0 f_0, \tag{5.11}$$

где

$$R(qk) = 2\varepsilon^0_q \varepsilon^0_k - 2\varepsilon_q \varepsilon_k + n_0^2 f_0^2,$$
$$Q^{\mp}(qk) = 3\varepsilon^0_q \varepsilon^0_k - \varepsilon_q \varepsilon_k + n_0 f_0\,(\varepsilon^0_q + \varepsilon^0_k) +$$
$$+ n_0^2 f_0^2 \mp [n_0 f_0\,(\varepsilon_q + \varepsilon_k) - \varepsilon_q \varepsilon^0_k - \varepsilon_k \varepsilon^0_q]. \tag{5.12}$$

Функцию Грина (4.5) удобно представить в виде, аналогичном (5.4). В рассматриваемом приближении находим

$$G(p+\mu) = \frac{A_p + \alpha_p}{p^0 - \varepsilon_p - \Lambda_p^-} - \frac{B_p + \alpha_p}{p^0 + \varepsilon_p + \Lambda_p^+}, \tag{5.13}$$

где α_p и $\Lambda_p^{\mp}$ — поправки второго приближения:

$$\alpha_p = \frac{n_0 f_0}{4\varepsilon_p^3}\{2\varepsilon^0_p \Sigma^{(2)}_{20} - n_0 f_0\,(\Sigma^+_{11} + \Sigma^-_{11} - 2\mu - 2\Sigma_{20})^{(2)}\};$$

$$\Lambda_p^{\mp} = \frac{\varepsilon^0_p}{2\varepsilon_p}(\Sigma^+_{11} + \Sigma^-_{11} - 2\mu)^{(2)} +$$
$$+ \frac{n_0 f_0}{2\varepsilon_p}(\Sigma^+_{11} + \Sigma^-_{11} - 2\mu - 2\Sigma_{20})^{(2)} \pm \frac{1}{2}(\Sigma^+_{11} - \Sigma^-_{11})^{(2)}. \tag{5.14}$$

α_p и $\Lambda_p^{\mp}$ выражаются через комбинации интегралов (5.9) и (5.10). В предельных случаях малых и больших импульсов (по сравнению с $\sqrt{n_0 f_0}$) можно получить явные выражения для функций $\alpha_p = \alpha(p^0; \mathbf{p})$ и $\Lambda_p^{\mp} = \Lambda^{\mp}(p^0; \mathbf{p})$, исследование которых показывает, что новых полюсов у функции Грина не возникает. Для определения функции Грина вблизи полюсов $p_0 \approx \pm\varepsilon_p$ можно в α_p положить $|p^0| = \varepsilon_p$, а в $\Lambda_p^{\mp}$ сохранить только первые степени разности $(\varepsilon_p \mp p^0)$. Для малых импульсов ($p \ll \sqrt{n_0 f_0}$), при этом найдем

$$\alpha_p = \sqrt{n_0 f_0^3}\left(\frac{2}{3\pi^2}\,\frac{n_0 f_0}{\varepsilon_p} + i\,\frac{1}{64\pi}\,\frac{\varepsilon_p}{n_0 f_0}\right) \quad (p \ll \sqrt{n_0 f_0};\ \varepsilon_p \approx p\sqrt{n_0 f_0}),$$

$$\Lambda_p^{\mp} \equiv \Omega_p + \lambda_p(\varepsilon_p \mp p^0) = \sqrt{n_0 f_0^3}\left(\frac{7}{6\pi^2}\,\varepsilon_p - i\,\frac{3}{640\pi}\,\frac{\varepsilon_p^5}{n_0^4 f_0^4}\right) +$$
$$+ (\varepsilon_p \mp p^0)\sqrt{n_0 f_0^3}\left(\frac{1}{2\pi^2} + i\,\frac{1}{32\pi}\,\frac{\varepsilon_p^2}{n_0^2 f_0^2}\right). \tag{5.15}$$

При больших импульсах существенной оказывается только мнимая часть $\Lambda_p^{\mp}$:

$$\Lambda_p^{\mp} = \Omega_p = -\frac{i}{4\pi} p f_0 n_0 f_0 \quad (p \gg \sqrt{n_0 f_0}). \tag{5.16}$$

Для малых импульсов функция Грина вблизи полюсов с учетом (5.13) и (5.15) может быть записана в следующем виде:

$$G(p+\mu) = (1-\lambda_{\mathbf{p}})\left[\frac{A_{\mathbf{p}}+\alpha_p}{p^0-\varepsilon_{\mathbf{p}}-\Omega_p} - \frac{B_{\mathbf{p}}+\alpha_p}{p^0+\varepsilon_{\mathbf{p}}+\Omega_p}\right]. \tag{5.17}$$

В случае больших импульсов в (5.17) надо пренебречь α_p и λ_p.

6. Спектр квазичастиц. Энергия основного состояния

Как уже было сказано, энергия квазичастиц определяется значением $p^0(\mathbf{p})$ в полюсах $G(p+\mu)$, причем надо отбирать лишь те полюса, которые дают отрицательную мнимую часть в энергии (затухание). Для случая $p \ll \sqrt{n_0 f_0}$ из (5.15) и (5.17) находим

$$\varepsilon = p\sqrt{n_0 f_0}\left(1+\frac{7}{6\pi^2}\sqrt{n_0 f_0^3}\right) - i\frac{3}{640\pi}\sqrt{n_0 f_0^3}\frac{p^5}{(n_0 f_0)^{3/2}} \quad (p \ll \sqrt{n_0 f_0}), \tag{6.1}$$

а в области больших импульсов, согласно (5.16), получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 + n_0 f_0\left(1 - \frac{i}{4\pi} p f_0\right) \approx \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 + n_0 f(\mathbf{pp}) \quad (p \gg \sqrt{n_0 f_0}). \tag{6.2}$$

Как следует из (6.1), при малых p квазичастицы являются фононами. Второе приближение дает поправку к скорости звука и затухание ($\sim p^5$), которое связано с процессом развала одного фонона на два. В области больших p во втором приближении возникает затухание, связанное с мнимой частью амплитуды рассеяния вперед (т. е. с полным сечением).

В (I, 7) показана связь функции Грина с некоторыми физическими характеристиками системы. Средние числа частиц с данным импульсом $\overline{N}_{\mathbf{p}}$ в основном состоянии связаны с вычетом в верхнем полюсе функции Грина:

$$\overline{N}_{\mathbf{p}} = i\int G\, dp^0/2\pi = (B_{\mathbf{p}}+\alpha_p)(1-\lambda_p). \tag{6.3}$$

Для $p \ll \sqrt{n_0 f_0}$ из (5.15) и (5.5) найдем

$$\overline{N}_{\mathbf{p}} = \frac{n_0 f_0}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}\left(1+\frac{5}{6\pi^2}\sqrt{n_0 f_0^3}\right) \tag{6.4}$$

(мнимые части α_p и λ_p, как и следовало ожидать, сократились). Для нахождения полного числа частиц с $\mathbf{p} \neq 0$ необходимо знать $\overline{N}_{\mathbf{p}}$ для всех импульсов. Мы ограничимся поэтому только первым приближением для $\overline{N}_{\mathbf{p}}\,(= B_{\mathbf{p}})$. Для плотности частиц с $\mathbf{p} \neq 0$ находим

$$n - n_0 = i\int G(p+\mu)\, d^4p = \int B_{\mathbf{p}}\, d\mathbf{p} = \sqrt{n_0 f_0^3}\, n_0/3\pi^2. \tag{6.5}$$

Соотношение (6.5) связывает плотность частиц в конденсате n_0, которая в качестве параметра входила во все формулы, с полным числом частиц в системе.

Отметим следующее существенное обстоятельство. Как следует из проведенных вычислений, для применимости «газового» приближения необходима малость n_0, а не полной плотности n, которая явно не входит в задачу. Но (6.5) показывает, что из малости n_0 следует и малость n.

Это означает, что путем увеличения взаимодействия или плотности нельзя уменьшить (до $n_0 \ll f_0^{-3}$) плотность конденсата. Этот результат дополняет и усиливает утверждение, сделанное в I о том, что конденсат не исчезает при включении взаимодействия.

Энергию основного состояния можно найти, пользуясь выражением для химического потенциала μ, для которого, согласно (4.4) и (5.11), имеем

$$\mu = n_0 f_0 \left(1 + \frac{5}{3\pi^2} \sqrt{n_0 f_0^3}\right), \tag{6.6}$$

или, выражая n_0 через n, из (6.5) в том же приближении найдем

$$\mu = n f_0 \left(1 + \frac{4}{3\pi^2} \sqrt{n f_0^3}\right). \tag{6.7}$$

Так как по определению $\mu = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{E}{V}\right)$, то, интегрируя (6.7) по n, получаем для энергии основного состояния

$$\frac{E_0}{V} = \frac{1}{2} n^2 f_0 \left(1 + \frac{16}{15\pi^2} \sqrt{n f_0^3}\right), \tag{6.8}$$

что совпадает с выражением, полученным в [3] для упругих шаров (при сравнении надо иметь в виду, что $f_0 = 4\pi a$).

Заметим, что условие термодинамической устойчивости системы $\partial P / \partial V = -\partial^2 E / \partial V^2 < 0$ совпадает с условием $f_0 > 0$. Только для систем с таким взаимодействием имеют смысл полученные результаты.

7. О возможности более высоких приближений

В двух первых приближениях все результаты выражаются через амплитуды f, т. е. задача многих взаимодействующих частиц сводится к решению двухчастичной задачи.

В следующем приближении следует учитывать в Σ_{ik} члены, пропорциональные $n_0 f_0^3$. Среди других графиков следует учесть и изображенные на рис. 4 «тройные лестницы». Интегралы, соответствующие графикам такого типа, расходятся при больших импульсах и становятся конечными только при учете зависимости f от импульсов. Для оценки можно обрезать интегралы при $p \sim f_0^{-1}$. Нетрудно видеть, что увеличение числа «ступенек» не меняет порядка графика. Действительно, каждая «ступенька» добавляет множитель $f_0 G^2$ и одно интегрирование по 4-импульсу. Для грубой оценки, полагая $q^0 \sim q^2$, $G \sim q^{-2}$, найдем

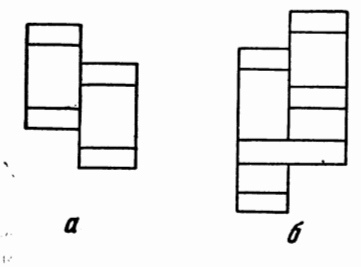

Рис. 4

$$\int f_0 G^2 d^4 q \sim f_0 \int dq \sim 1,$$

откуда следует, что графики с произвольным числом «ступенек» необходимо учитывать одновременно. Совокупность всех «тройных лестниц» описывает взаимодействие трех частиц, поэтому их сумма выразится через трехчастичные амплитуды.

Таким образом, в следующем приближении ($\sim n_0 f_0^3$) войдут величины трехчастичной задачи (ср. [4]). В связи с тем, что задачу трех сильно взаимодействующих частиц в общем случае решить нельзя, высшие приближения по плотности в задаче многих частиц теряют смысл.

8. Высокие возбуждения ($pf_0 \sim 1$). Случай упругих шаров

Высокие возбуждения, когда становится существенной зависимость амплитуд от импульсов, мы рассмотрим на частном примере газа из упругих шаров радиуса $a/2$. Мы ограничимся при этом первым приближением по плотности, т. е. формулой (4.6). Амплитуда $f(\mathbf{p}0)$ по формуле (3.10) вычисляется точно. Для $f_s(\frac{\mathbf{p}}{2}\frac{\mathbf{p}}{2})$ мы ограничимся s-волной: следующие члены (симметризованная амплитуда разлагается только по четным l) дают численно незначительный вклад (уже d-волна при $pa \sim 1$ составляет $\sim 10\%$). Подставляя в (4.7) значения амплитуд

$$f(\mathbf{p}0) = 4\pi \frac{\sin pa}{p}; \quad f_s\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\frac{\mathbf{p}}{2}\right) = \frac{8\pi}{p} \sin\frac{pa}{2} e^{-ipa/2}, \tag{8.1}$$

находим для энергии квазичастиц

$$\varepsilon = \left[\left(\frac{p^2}{2} + 8\pi n_0 \frac{\sin pa}{p} - 4\pi n_0 a\right)^2 - 16\pi^2 n_0^2 \frac{\sin^2 pa}{p^2}\right]^{1/2}, \tag{8.2}$$

или для больших импульсов

$$\varepsilon \approx \frac{p^2}{2} + 4\pi n_0 a\left(2\frac{\sin pa}{pa} - 1\right). \tag{8.3}$$

Второй член в (8.3) при $pa \approx 1{,}9$ меняет знак, в результате чего на основной параболе возникает волнообразный изгиб. Однако это существенно не сказывается на дисперсии ввиду малости этого члена (при $pa \sim 1$ его относительный порядок $n_0 a^3$). Если формально увеличивать в (8.3) или (8.2) параметр $n_0 a^3$, то изгиб на кривой дисперсии, вызываемый вторым членом в (8.3), увеличивается и при достаточно большой плотности возникает сначала перегиб, а затем максимум и минимум, так что спектр качественно совпадает с постулированным Л. Д. Ландау для объясения свойств гелия II [5]. Такая экстраполяция является, конечно, незаконной, но она позволяет предположить, что отличие жидкого гелия от неидеального бозе-газа чисто количественное и при переходе от газа к жидкости не возникает качественно новых явлений.

9. Заключение

Отметим основные черты рассмотренного приближения:

1) Взаимодействие между частицами описывается не потенциалом, а точной амплитудой рассеяния, что позволяет рассматривать сильные взаимодействия. После замены потенциала амплитудой появляется возможность развивать теорию возмущений по амплитуде (точнее по $\sqrt{n_0 f_0^3}$).

2) Разлагается в ряд не энергия квазичастиц (т. е. знаменатель функции Грина), а эффективные потенциалы взаимодействия Σ_{ik} и химический потенциал μ. Связь же функции Грина с Σ_{ik} и μ устанавливается точно.

Из (4.7) или (4.9) видно, что разлагать $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ в ряд по f можно лишь для высоких возбуждений с $p \gg \sqrt{n_0 f_0^3}$, а состояния системы, близкие к основному, в принципе не могут быть получены по теории возмущений. По этой причине выражение для энергии нижних состояний бозе-системы из упругих шаров, полученное в [4] из теории возмущений по «псевдопотенциалу», является неправильным. (Оно совпадает с формальным разложением (4.7) по f_0.)

В заключение я хочу поблагодарить А. Б. Мигдала и особенно В. М. Галицкого за плодотворные дискуссии, а также Л. Д. Ландау за обсуждение результатов.

Академия наук СССР

Поступила в редакцию
2 августа 1957 г.

Литература

[1] С. Т. Беляев. ЖЭТФ, этот выпуск, стр., 417.
[2] В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, **34**, 139, 1958.
[3] T. D. Lee, C. N. Yang. Phys. Rev., **105**, 1119, 1957.
[4] K. Haung, C. N. Yang. Phys. Rev., **105**, 767, 1957.
[5] Е. М. Лифшиц. УФН, **34**, 512, 1948.

ENERGY SPECTRUM OF A NON-IDEAL BOSE-GAS

S. T. Belyaev

The single particle Green's function is derived for a system of interacting Bose particles in the low density approximation. The Green's function is used to determine the energy levels near the ground state (spectrum of quasiparticles).