С. Т. Беляев

КИНЕТИКА ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ *

Ионизованный газ в сильном магнитном поле рассматривается как совокупность ларморовских кружков. Получено кинетическое уравнение для функции распределения ларморовских кружков. Рассматривается его решение в гидродинамическом приближении. В однородном магнитном поле вычислен коэффициент электрон-ионной диффузии. В неоднородном поле найдены потоки без учета столкновений.

Кинетическое уравнение при наличии магнитного поля H имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]\frac{\partial f}{\partial p} = st(f), \qquad (1)$$

где $st(f)$ обозначает столкновительный член, а остальные обозначения обычные.

Мы будем рассматривать случай сильного магнитного поля, когда время свободного пробега τ велико по сравнению с периодом ларморовского вращения, т. е.

$$\omega\tau \gg 1, \qquad (2)$$

где $\omega = -\frac{eH}{mc}$ — частота вращения. Ларморовское вращение в этом случае является «быстрым» процессом, а кинетические процессы (следствия столкновений) — «медленными».

В [1] и [2] рассматривалась общая задача упрощения кинетического уравнения путем исключения «быстрых» переменных. Для функции распределения по оставшимся «медленным»

* Работа выполнена в 1955 г.

переменным было получено приближенное (с точностью до $(\omega\tau)^{-1}$ уравнение, которое имеет вид уравнения непрерывности в пространстве «медленных» переменных.

В нашем случае есть только одна «быстрая» переменная — фаза ларморовского вращения, так что уравнение для распределения по «медленным» переменным лишь незначительно проще исходного уравнения (1) и практически приходится использовать дополнительные приближения, например малость градиентов («гидродинамическое приближение»).

Исходное уравнение (1) также решают гидродинамическим приближением, но в нулевом приближении сохраняют не только столкновительный член, но и член с магнитным полем (главный в случае $\omega\tau \gg 1$) [3, 4]. Решением нулевого приближения, как и в отсутствие поля, является максвелловское распределение. Таким образом, в исходном приближении сохраняются члены разных порядков по $\omega\tau$, а функция распределения определяется по существу меньшим из оставленных членов — столкновительным. Вследствие этого наглядная физическая интерпретация результатов решения уравнения (1) часто бывает затруднительной, так как состояние газа описывается в терминах свободных частиц (плотность, средняя скорость частиц в данной точке и т. д.), а сильное магнитное поле «размазывает» частицы по ларморовской орбите и тем самым лишает наглядности «частичные» понятия.

В сильном магнитном поле физическую наглядность приобретают ларморовские кружки, характеризующиеся только «медленными» переменными (координаты центра, радиус, продольная скорость). Поэтому результаты, полученные из упрощенного уравнения и относящиеся именно к кружкам (плотность ларморовских кружков, их поток и т. д.), проще интерпретировать. Правда, решение граничных задач оказывается при этом более сложным.

В настоящей работе рассматривается кинетика ларморовских кружков главным образом в гидродинамическом приближении (исключение составляет лишь последний раздел). При этом мы не ставим себе целью рассмотреть все кинетические процессы, а лишь иллюстрируем метод на отдельных задачах (см. также [5, 6]).

При рассмотрении столкновений длина экранирования кулоновского взаимодействия заранее не считается малой по сравнению с ларморовским радиусом и учитывается влияние поля на соударения. (При больших прицельных параметрах сталкиваются ларморовские кружки, а не свободные частицы.)

Будем описывать ларморовские кружки положением центра $\mathbf{r}^0 = (x^0 y^0 z^0)$, радиусом ρ и продольной скоростью $v^{\parallel}$ (или продольным импульсом $p^{\parallel} = mv^{\parallel}$) — медленные переменные Y^{α}.

Вместо ρ удобно использовать также переменную $I = \frac{1}{2} m\omega\rho^2$, которая канонически сопряжена с фазой частицы ϑ. Уравнение для функции распределения по «медленным» переменным F, полученное в [2], запишем в виде уравнения непрерывности

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = -\operatorname{div}_1 j^{\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial}{\partial Y_1^{\alpha}} (\sqrt{G_1} j^{\Gamma\alpha}), \tag{3}$$

где плотность потока j^{Γ} имеет вид

$$j^{\Gamma\alpha} = \dot{Y}_1^{\alpha} F_1 + [\langle U + U_c \rangle;\ Y_1^{\alpha}] F_1 - \frac{1}{2} \int \sqrt{G_2} d Y_2 \times$$

$$\times \left(\langle \Delta Y_1^{\alpha} \Delta Y_1^{\beta} \rangle \frac{\partial F_1}{\partial Y_1^{\beta}} F_2 + \langle \Delta Y_1^{\alpha} \Delta Y^{\beta} \rangle \frac{\partial F_2}{\partial Y_2^{\beta}} F_1 \right). \tag{4}$$

Здесь U — обычное, а U_c — «коррелятивное» самосогласованное поле (см. [2] формула (1.9)); [;] означают скобки Пуассона; $\langle\rangle_{\vartheta} \equiv \langle\rangle$ — усреднение по быстрым переменным (фазам ϑ), а $\sqrt{G}$ — якобиан перехода от медленных переменных из числа канонически сопряженных (включающих переменные действия) к произвольным медленным переменным Y^{α}. Для полного определения коэффициентов уравнения (3) остается вычислить скорости $\dot{Y}^{\alpha}$ и тензор рассеяния $\langle \Delta Y^{\alpha} \Delta Y^{\beta} \rangle$ — средние квадратичные отклонения.

§ 1. Однородное магнитное поле

1. 2. *Вычисление коэффициентов уравнения.* Из величин $\dot{Y}^{\alpha}$ в однородном поле отлична от нуля только продольная скорость $\dot{z}^0 = v^{\parallel}$.

В гидродинамическом приближении в уравнение входит интеграл от тензора рассеяния

$$Q^{\alpha\beta} = \int \langle \Delta Y^{\alpha} \Delta Y^{\beta} \rangle \, d\mathbf{r}_2^0. \tag{1.1}$$

В [2] для тензора рассеяния было получено выражение

$$\langle \Delta Y^{\alpha} \Delta Y^{\beta} \rangle = \langle [\Phi;\ Y^{\alpha}] [\Psi;\ Y^{\beta}] + [\Psi;\ Y^{\alpha}] [\Phi;\ Y^{\beta}] \rangle. \tag{1.2}$$

Здесь Φ — потенциал парного взаимодействия частиц, а

$$\Psi = \int_0^{\infty} S_{-t'}^0 \ dt',$$

где S_t^0 — оператор, заменяющий переменные на их значения через время t (классический аналог S-матрицы). Подставляя

(1.2) в (1.1) и используя фурье-представление кулоновского потенциала

$$\Phi(r) = \int \varphi(k) \cdot e^{i\mathbf{kr}} d\mathbf{k}; \quad \varphi(k) = \frac{e_1 e_2}{2\pi^2 k^2}, \tag{1.3}$$

получим после интегрирования в (1.1) по $\mathbf{r}_2^0$

$$Q^{\alpha\beta} = (2\pi)^3 \int_0^\infty dt' \int d\mathbf{k} \, |\varphi(k)|^2 \langle [\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2); \; Y^\alpha] \, [\mathbf{k} S^0_{-t'}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2); \; Y^\beta] \times$$

$$\times \exp\{i\mathbf{k}(1 - S^0_{-t'})(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\} + \text{трансп}\,(\alpha \longleftrightarrow \beta)\rangle_{\vartheta_1 \vartheta_2}. \tag{1.4}$$

Выразив в (1.4) переменные r через r^0, ρ и ϑ согласно

$$\mathbf{kr} = \mathbf{kr}^0 + k_\perp \rho \cos\vartheta$$

и записывая явно действие оператора S^0_{-t}, которое сводится к замене z^0 на $z^0 - v^\parallel t$, а фаз ϑ — на $\vartheta - \omega t$, после несложных преобразований получим

$$Q^{\alpha\beta} = (2\pi)^3 \int_0^\infty dt' \int d\mathbf{k} \, |\varphi(k)|^2 k^2 \Big\langle (Y^\alpha Y^\beta) \exp ik \Big\{ n_\parallel (v_1^\parallel - v_2^\parallel) t' +$$

$$+ 2n_\perp \rho_1 \sin\frac{\omega_1 t'}{2} \cos\vartheta_1 - 2n_\perp \rho_2 \sin\frac{\omega_2 t'}{2} \cos\vartheta_2 \Big\} \Big\rangle, \tag{1.5}$$

где $n_\parallel$ и $n_\perp$ — параллельная и перпендикулярная полю составляющие единичного вектора $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$, а симметричные величины $(Y^\alpha Y^\beta)$ имеют вид

$$(I_1 I_1) = 2\rho_1^2 n_\perp^2 \left(\cos^2\vartheta_1 - \sin^2\frac{\omega_1 t'}{2}\right);$$

$$(I_1 p_1^\parallel) = -(I_1 p_2^\parallel) = 2\rho_1 n_\parallel n_\perp \cos\frac{\omega_1 t'}{2} \cos\vartheta_1,$$

$$(I_1 I_2) = -2\rho_1 \rho_2 n_\perp^2 \cos\frac{\omega_1 t'}{2} \cos\frac{\omega_2 t'}{2} \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2;$$

$$(p_1^\parallel I_2) = -2\rho_2 n_\parallel n_\perp \cos\frac{\omega_2 t'}{2} \cos\vartheta_2; (p_1^\parallel p_1^\parallel) = -(p_1^\parallel p_2^\parallel) = 2n_\parallel^2, \tag{1.6}$$

$$m_1 (I_1 z_1^0) = -m_2 (I_1 z_2^0) = t' \rho_1 n_\parallel n_\perp \cos\frac{\omega_1 t'}{2} \cos\vartheta_1;$$

$$m_1 (p_1^\parallel z_1^0) = -m_2 (p_1^\parallel z_2^0) = t' n_\parallel^2; \; (x_1^0 x_1^0) = (y_1^0 y_1^0) = \frac{n_\perp^2}{m_1^2 \omega_1^2};$$

$$(x_1^0 x_2^0) = (y_1^0 y_2^0) = -\frac{n_\perp^2}{m_1 m_2 \omega_1 \omega_2}.$$

Пределы интегрирования в (1.5) по абсолютному значению k определяются областью экранирования кулоновского взаимодействия. Если взаимодействие экранируется на расстояниях, малых по сравнению со средним ларморовским радиусом, то в (1.5) существенны только большие k ($k\rho \gg 1$). В обратном предельном случае существенна также и область малых k. Не делая пока никаких предположений о размерах области экранирования, рассмотрим вклад в $Q^{\alpha\beta}$ каждой из областей $k\rho > 1$ и $k\rho < 1$.

$k\rho > 1$. В этом случае в (1.5) существенны малые значения t', так как в противном случае подынтегральное выражение быстро осциллирует. Разлагая тригонометрические функции по $\omega t'$ и вводя обозначение $\xi = kt'$, получаем

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi} e_1^2 e_2^2 \int_0^\infty d\xi \int \frac{dk}{k} \int do_{\mathbf{n}} \langle (Y^\alpha Y^\beta) \exp i\,\xi \{ n_\parallel (v_1^\parallel - v_2^\parallel) + \\ + n_\perp v_1^\perp \cos\vartheta_1 - n_\perp v_2^\perp \cos\vartheta_2 \} \rangle, \qquad (1.7)$$

где подставлено значение $\varphi(k)$ из (1.3) и обозначено $v^\perp = \rho\omega$. Существенные из величин $(Y^\alpha Y^\beta)$ (не содержащие степеней $1/k$ и дающие поэтому в (1.7) при интегрировании кулоновский логарифм) равны

$$(I_1 I_1) = \frac{2}{\omega_1^2} (v_1^\perp n_\perp \cos\vartheta_1)^2; \quad (I_1 p_1^\parallel) = -(I_1 p_2^\parallel) = \\ = \frac{2}{\omega_1} n_\parallel n_\perp v_1^\perp \cos\vartheta_1, \quad (I_1 I_2) = -\frac{2}{\omega_1 \omega_2} n_\perp^2 v_1^\perp v_2^\perp \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2;$$

$$(p_1^\parallel I_2) = -\frac{2}{\omega_2} n_\parallel n_\perp v_2^\perp \cos\vartheta_2, \quad (p_1^\parallel p_1^\parallel) = -(p_1^\parallel p_2^\parallel) = 2n_\parallel^2;$$

$$(x_1^0 x_1^0) = \frac{n_\perp^2}{m_1^2 \omega_1^2}; \quad (x_1^0 x_2^0) = -\frac{n_\perp^2}{m_1 m_2 \omega_1 \omega_2}. \qquad (1.8)$$

$k\rho < 1$. В этом случае в показателе экспоненты в (1.5) можно отбросить члены, содержащие ρ. В результате получаем

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi} e_1^2 e_2^2 \int_0^\infty d\xi \int \frac{dk}{k} \int do_{\mathbf{n}} \langle (Y^\alpha Y^\beta) \rangle \exp i\xi n_\parallel (v_1^\parallel - v_2^\parallel), \qquad (1.9)$$

где отличны от нуля

$$\langle (x_1^0 x_1^0) \rangle = \frac{n_\perp^2}{m_1^2 \omega_1^2}; \quad \langle (x_1^0 x_2^0) \rangle = -\frac{n_\perp^2}{m_1 m_2 \omega_1 \omega_2},$$

$$\left.\begin{aligned}\langle (I_1 I_1)\rangle = \rho_1^2 n_\perp^2 \cos\frac{\omega_1\xi}{k}\,;\ \langle (p_1^\parallel p_1^\parallel)\rangle = -\langle (p_1^\parallel p_2^\parallel)\rangle = 2n_\parallel^2 \qquad (1.10)\\ m_1\langle (p_1^\parallel z_1^0)\rangle = -m_2\langle (p_1^\parallel z_2^0)\rangle = n_\parallel^2\frac{\xi}{k}\,.\end{aligned}\right\}(k\rho<1).$$

Нетрудно видеть, что при $|v_1^\parallel - v_2^\parallel|\,\frac{k}{\omega_1} < 1$ интеграл по ξ для Q^{II} равен нулю. Для остальных компонент интегрирование в (1.9) по ξ приводит к δ-функции от $n_\parallel$, поэтому можно отбросить те из них, которые в (1.10) содержат $n_\parallel^2$. Таким образом, исчезают все импульсные и смешанные компоненты $Q^{\alpha\beta}$. Если брать в (1.5) дальнейшие члены разложения экспоненты по $k\rho$, то для указанных компонент все они также обращаются в нуль (либо равен нулю интеграл по ξ, либо последующий интеграл по $n_\parallel$). Такое положение означает, что импульсные и смешанные компоненты $Q^{\alpha\beta}$ имеют экспоненциальный порядок малости $\left(\sim \exp\left(-\frac{a}{k\rho}\right)\right)$. Ниже, при рассмотрении конкретных задач, будет показано, что этот результат физически вполне нагляден. Для существенных координатных компонент интегрирование в (1.9) может быть проведено до конца. В результате находим

$$Q^{x_1^0 x_1^0} = \frac{4\pi e_1^2 e_2^2}{m_1^2\omega_1^2}\,|v_1^\parallel - v_2^\parallel|^{-1}\ln\frac{d}{\rho}\,,$$

$$Q^{x_1^0 x_2^0} = -\frac{4\pi e_1^2 e_2^2}{m_1 m_2\omega_1\omega_2}\,|v_1^\parallel - v^\parallel|^{-1}\ln\frac{d}{\rho}\,, \qquad (1.11)$$

где d — размер области экранирования взаимодействия. (Нижняя граница прицельных параметров определена из условия $k\rho \approx 1$.)

При рассмотрении столкновений ионов и электронов следует учитывать различие их средних ларморовских радиусов, отношение которых при равных температурах $\rho_i/\rho_e = (m_i/m_e)^{1/2}$. В этом случае появляется область прицельных параметров, лежащих между ρ_e и ρ_i. Рассмотрим вклад этой области в D.

Пусть $\rho_1 \gg \rho_2$. Для k, удовлетворяющих неравенствам $\rho_2 < 1/k < d < \rho_1$, в (1.5) в показателе экспоненты можно опустить член с ρ_2, а в члене с ρ_1 заменить $\sin\frac{\omega_1 t'}{2}$ аргументом

(так как существенна область t', где $\omega_1 t' < 1$). В результате из (1.5) и (1.6) следует

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{2e_1^2 e_2^2}{\pi} \int_0^\infty d\xi \int \frac{dk}{k} \int do_{\boldsymbol{n}} \left\langle (Y^\alpha Y^\beta) \exp i\xi \left\{ n_\parallel (v_1'' - v_2'') + \right. \right.$$

$$\left. \left. + n_\perp v_1^\perp \cos \vartheta_1 \right\} \right\rangle, \qquad (1.12)$$

где существенные из величин $(Y^\alpha Y^\beta)$ равны

$$(I_1 I_1) = \frac{2}{\omega_1^2} (v_1^\perp n_\perp \cos \vartheta_1)^2; \quad (I_1 p_1'') = -(I_1 p_2'') =$$

$$= \frac{2}{\omega_1} n_\parallel n_\perp v_1^\perp \cos \vartheta_1, \qquad (1.13)$$

а для $(p_1'' p_1'') = -(p_1'' p_2'')$, $(x_1^0 x_1^0)$ и $(x_1^0 x_2^0)$ то же, что в (1.6). Рассматривая показатель экспоненты в (1.12) как скалярное произведение $\boldsymbol{nu}$, произведем интегрирование по направлениям $\boldsymbol{n}$, выбирая за полярную ось $\boldsymbol{u}$. После этого можно проинтегрировать также по ξ. В результате получим

$$Q^{I_1 I_1} = A \frac{u_\parallel^2 u_\perp^2}{\omega_1^2 u^3}; \quad Q^{I_1 p_1''} = -Q^{I_1 p_2''} = -A \frac{u^\parallel u_\perp^2}{\omega_1 u^3},$$

$$Q^{p_1'' p_1''} = -Q^{p_1'' p_2''} = A \frac{u_\perp^2}{u^3}; \quad Q^{\overset{0}{x_1}\overset{0}{x_1}} = \frac{A}{m_1^2 \omega_1^2 u} \left(1 - \frac{u_\perp^2}{2u^2} \right), \qquad (1.14)$$

$$Q^{\overset{0}{x_1}\overset{0}{x_2}} = -\frac{A}{m_1 m_2 \omega_1 \omega_2 u} \left(1 - \frac{u_\perp^2}{2u^2} \right); \quad \left(\rho_2 < \frac{1}{k} < d < \rho_1 \right)$$

$$\left(A = 4\pi e_1^2 e_2^2 \ln \frac{d}{\rho_2}; \quad u_\parallel = v_1'' - v_2''; \quad u_\perp = v_1^\perp; \quad u^2 = u_\parallel^2 + u_\perp^2 \right).$$

Пусть теперь $\rho_1 \ll \rho_2$, тогда аналогично предыдущему из (1.5) и (1.6) получим для области $\rho_1 < 1/k < d < \rho_2$

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{2e_1^2 e_2^2}{\pi} \int_0^\infty d\xi \int \frac{dk}{k} \int do_{\boldsymbol{n}} \left\langle (Y^\alpha Y^\beta) \exp i\xi \left\{ n_\parallel (v_1'' - v_2'') - \right. \right.$$

$$\left. \left. - n_\perp v_2^\perp \cos \vartheta_2 \right\} \right\rangle, \qquad (1.15)$$

где существенны только величины $(p_1'' p_1'') = -(p_1'' p_2'')$, $(x_1^0 x_1^0)$ и $(x_1^0 x_2^0)$, имеющие те же значения, что и в (1.6). Интегри-

рование в (1.15) может быть проведено до конца. В результате получаем:

$$Q^{x_1^0 x_1^0} = \frac{A'}{m_1^2\omega_1^2 u'}\left(1 - \frac{u_\perp'^2}{2u'^2}\right); \quad Q^{v_1^0 x_2^0} = -$$

$$- \frac{A'}{m_1 m_2 \omega_1 \omega_2 u'}\left(1 - \frac{u_\perp'^2}{2u'^2}\right), \tag{1.16}$$

$$Q^{p_1'' p_1''} = -Q^{p_1'' p_2''} = A'\frac{u_\perp'^2}{u'^3} \quad (\rho_1 < 1/k < d < \rho_2)$$

$$\left(A' = 4\pi e_1^2 e_2^2 \ln\frac{d}{\rho_1}; \quad u_\parallel' = v_1'' - v_2''; \quad u_\perp' = v_2^\perp\right).$$

1. 2. *Время релаксации.* Рассмотрим слабо неоднородный газ. Плотность n и температура T зависят от координат, но так, что длина l, на которой n и T заметно меняются, много больше ларморовского радиуса ρ. В однородном магнитном поле время исчезновения градиентов, перпендикулярных к полю, по порядку величины определяется $t_\perp \sim l^2/D$, где коэффициент диффузии $D \sim \rho^2/\tau$. Отношение времен релаксации по импульсам (τ) и по координатам ($t_\perp$) равно $\tau/t_1 \sim (\rho/l)^2 \ll 1$. В этом случае можно применить гидродинамическое приближение к уравнению (3). Пренебрегая в первом приближении производными по координатам, получим из (3)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial j^I}{\partial I} + \frac{\partial j^{p''}}{\partial p''} = 0. \tag{1.17}$$

(В однородном поле $\sqrt{G} = m^2\omega = \text{const}$). Поток j^I устанавливает равновесное распределение по скоростям, поперечным магнитному полю, а $j^{p''}$ — по продольным скоростям. Величины этих потоков определяются импульсными компонентами тензора рассеяния $\langle \Delta I \Delta I\rangle$, $\langle \Delta I \Delta p''\rangle$, $\langle \Delta p'' \Delta p''\rangle$. Существенный вклад в эти компоненты, как было выяснено в предыдущем разделе, дают только близкие столкновения ($k\rho > 1$). Далекие столкновения происходят адиабатически и не изменяют поперечную энергию сталкивающихся кружков (а в силу законов сохранения также и продольную). Таким образом, далекие столкновения не играют роли в процессе установления равновесия по скоростям. Близкие же столкновения происходят одинаково как в присутствии поля, так и без него. Поэтому поле непосредственно не влияет на процесс установления максвелловского распределения и, в частности, на величину времени релаксации. H может изменить лишь раз-

меры области экранирования взаимодействия, ограничив их ларморовским радиусом, что приведет к изменению кулоновского логарифма (в случае $d > \rho$). Утверждение в [5] о различных временах релаксации по продольным и поперечным скоростям, очевидно, ошибочно.

Задача следующих приближений — получить из (3) уравнения макроскопических потоков ларморовских кружков и энергии. Ниже мы ограничимся рассмотрением только одного эффекта — диффузии электронов в результате столкновений с ионами.

1. *3. Коэффициент электрон-ионной диффузии.* Пусть плотность электронов имеет градиент по оси x (температура постоянна, потоки вдоль $\boldsymbol{H}$ отсутствуют).
Подставляя в (3) максвелловское распределение

$$F_1 = \frac{2\pi n_1}{(2\pi m_1 T)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{I_1\omega_1}{T} - \frac{p_1''^2}{2m_1 T}\right\} \tag{1.18}$$

и интегрируя по I_1 и p_1'', получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{\partial i_x}{\partial x_1^0} = 0, \tag{1.19}$$

где поток i_x равен

$$i_x = m_1\omega_1 \int j^{x^0} dI_1 dp_1''. \tag{1.20}$$

Нас сейчас интересует диффузионный поток, т. е. та часть в (1.20), которая пропорциональна градиенту плотности. Представляя $i_x^{\text{диф}} = -D\frac{\partial n_1}{\partial x_1^0}$, получим для коэффициента диффузии D с учетом (4) и (1.1)

$$D = \frac{1}{2} n_2 \overline{Q^{x^0}_{1\,x_1^0}}. \tag{1.21}$$

Здесь черта означает усреднение по максвелловскому распределению как ионов, так и электронов.

Рассмотрим сначала случай, когда взаимодействие экранируется на расстояниях d, малых по сравнению с электронным ларморовским радиусом ($d < \rho_1 \ll \rho_2$). Из (1.7) и (1.8) получим, пренебрегая скоростями ионов,

$$D = \frac{e_1^2 e_2^2 n_2 L}{\pi m_1^2 \omega_1^2} \int_0^\infty d\xi \int do_{\mathbf{n}} n_\perp^2 \overline{\langle \exp i\xi \{n_\parallel v_1'' + n_\perp v_1^\perp \cos\vartheta_1\}\rangle}. \tag{1.22}$$

Интегрирование в (1.22) по $\boldsymbol{n}$ и ξ проводится так же, как в (1.12).

В результате получим:

$$D = \frac{2\pi e_1^2 e_2^2 n_2 L}{m_1^2 \omega_1^2} \overline{\frac{1}{v_1}\left(1 - \frac{v_1^{\perp^2}}{2v_1^2}\right)}. \qquad (1.23)$$

Учитывая, что при усреднении по максвелловскому распределению $\overline{(v_\perp/v)^2} = \frac{2}{3}$; $\overline{1/v} = \sqrt{\frac{2m}{\pi T}}$, получим окончательно:

$$D = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{e_1^2 e_2^2 n_2}{m_1^{3/2} T^{1/2} \omega_1^2} \frac{Td}{|e_1 e_2|} \quad (d < \rho_1 \ll \rho_2), \qquad (1.24)$$

где в кулоновском логарифме подставлены значения $k_{\text{макс}} = T/|e_1 e_2|$, $k_{\text{мин}} = 1/d$.

Перейдем к случаю, когда длина экранирования удовлетворяет неравенствам $\rho_1 < d < \rho_2$. Теперь, кроме области $k > 1/\rho_1$, следует учитывать и область $1/d < k < 1/\rho_1$. Вклад этой области в D можно получить из (1.18) усреднением по максвелловскому распределению. Более удобно, однако, усреднять выражение (1.15), которое можно записать в виде

$$Q^{x_1^0 x_1^0} = \frac{2e_1^2 e_2^2 L}{\pi m_1^2 \omega_1^2} \int_0^\infty d\xi \int do_{\mathbf{n}} n_\perp^2 \exp i\xi (n_1 v_1'' - \boldsymbol{n}\boldsymbol{v}_2). \qquad (1.25)$$

Усреднение экспоненты по максвелловскому распределению проводится элементарно

$$\overline{\exp i\xi n_\parallel v_1''} = \exp\left(-\frac{\xi^2 n_\parallel^2 T}{2m_1}\right); \quad \overline{\exp(-i\xi \boldsymbol{n}\boldsymbol{v}_2)} = \exp\left(-\frac{\xi^2 T}{2m_2}\right).$$

Интегрируя затем по ξ и $\boldsymbol{n}$ и пренебрегая величиной m_1/m_2, получим для вклада в D от области прицельных параметров $\rho_1 < 1/k < \rho_2$

$$D' = \sqrt{2\pi} \frac{e_1^2 e_2^2 n_2}{m_1^{3/2} T^{1/2} \omega_1^2} \ln \frac{d}{\bar{\rho}_1} \left(\ln \frac{4m_2}{m_1} - 1\right); \quad (\rho_1 < 1/k < d), \qquad (1.26)$$

где под $\bar{\rho}$ следует понимать среднее значение $\bar{\rho} = \sqrt{\frac{2T}{m\omega^2}}$. Полный коэффициент диффузии в случае $\rho_1 < d < \rho_2$ складывается из (1.26) и (1.24). (В последнем выражении следует заменить d на $\bar{\rho}_1$.)

Рассмотрим, наконец, случай $d > \rho_2$ и вычислим вклад в D от области прицельных параметров $\rho_2 < 1/k < d$. Из (1.11) и (1.21) находим

$$D'' = \frac{2\pi e_1^2 e_2^2 n_2}{m_1^2 \omega_1^2} \overline{|v_1'' - v_2''|}^{-1} \ln \frac{d}{\bar{\rho}_2} \quad (\rho_2 < 1/k < d). \qquad (1.27)$$

При вычислении среднего по максвелловскому распределению интеграл по v'' расходится на нижнем пределе. Это следствие того, что при малой относительной продольной скорости сталкивающихся частиц изменения их координат Δx^0 за время столкновения нельзя считать малыми, и полученные формулы становятся неприменимыми. Интеграл по v'' следует обрезать на некотором значении $v''_{\text{мин}}$:

$$\overline{|v_1'' - v_2''|^{-1}} \approx 2\left(\frac{m_1}{2\pi T}\right)^{1/2} \int\limits_{v''>0} \exp\left(-\frac{m_1 v''^2}{2T}\right) \frac{dv''}{v''} \approx$$

$$\approx 2\left(\frac{m_1}{2\pi T}\right)^{1/2} \ln \sqrt{\frac{2T}{m_1 v''^2_{\text{мин}}}}. \qquad (1.28)$$

Из (1.27) и (1.28) следует

$$D'' = 2\sqrt{2\pi}\, \frac{e_1^2 e_2^2 n_2}{m_1^{3/2} T^{1/2} \omega_1^2} \ln \frac{d}{\rho_2} \cdot \ln \sqrt{\frac{2T}{m_1 v''^2_{\text{мин}}}} \quad (\rho_2 < 1/k < d) \qquad (1.29)$$

Прежде чем обосновать величину параметра обрезания $v''_{\text{мин}}$, полезно установить физический смысл полученных результатов. Положение частицы в магнитном поле определяется выражением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^0 - \frac{1}{\omega}[\boldsymbol{h}\boldsymbol{v}], \qquad (1.30)$$

где $\boldsymbol{r}^0$ — координата ларморовского центра; $\boldsymbol{h}$ — единичный вектор в направлении $\boldsymbol{H}$; $\boldsymbol{v}$ — скорость частицы. При близких столкновениях положение сталкивающихся частиц практически не меняется и из (1.30) следует при этом $\Delta\boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{r}^0 - \frac{1}{\omega}[\boldsymbol{h}\Delta\boldsymbol{v}] = 0$, т. е $(\Delta\boldsymbol{r}_0)^2 = \frac{1}{\omega^2}(\Delta v_\perp)^2$. Таким образом, при близких столкновениях изменение скоростей сталкивающихся частиц приводит к изменению координат центров кривизны и, в конечном счете, к диффузии ларморовских кружков. Этот механизм перестает работать при далеких столкновениях, так как для них изменение скоростей есть экспоненциально малый эффект. При далеких столкновениях появляется другой механизм диффузии: дрейф частицы в кулоновском поле своего партнера по столкновению. Дрейфовая скорость $v_{\text{др}} = c\frac{E}{H}$. В нашем случае электрическое поле $E \sim \frac{e_2}{R^2}$, где R $(\sim 1/k)$ — расстояние между кружками. Считая, что столкновение происходит за время R/v'', найдем для Δx^0

$$\Delta x^0 \sim v_{\text{др}} \frac{R}{v''} \sim \frac{ce_2}{Rv''H} = \frac{e_1 e_2}{m_1 \omega_1 v'' R}, \qquad (1.31)$$

откуда для коэффициента диффузии

$$D \sim \overline{\int (\Delta x^0)^2 n_2 \,|\, v'' \,|\, d\sigma} \sim \overline{\frac{e_1^2 e_2^2}{m_1^2 \omega_1^2 v''^2} n_2 \,|\, v'' \,| \int \frac{2\pi R dR}{R^2}} =$$

$$= \frac{2\pi e_1^2 e_2^2 n_2}{m_1^2 \omega_1^2} \overline{|\, v'' \,|^{-1}} \ln \frac{R_{\text{макс}}}{R_{\text{мин}}}, \qquad (1.32)$$

что совпадает с (1.27). При малых v'' столкновение происходит длительное время и изменение x^0 при столкновении согласно (1.31) может быть велико. Если v'' меньше скорости дрейфа, то время столкновения будет определяться не v'', а дрейфовой скоростью, поэтому естественно в качестве $v''_{\text{мин}}$ взять величину

$$v_{\text{др}} = \frac{|e_1 e_2|}{m_1 \omega_1} k_{\text{мин}} k_{\text{макс}} \sim \frac{|e_1 e_2|}{m_1 \omega_1} \frac{1}{\bar{\rho}_2 d} *. \qquad (1.33)$$

Мы покажем сейчас, однако, что эффект тройных столкновений приводит к необходимости обрезания на значительно больших относительных скоростях.

При больших прицельных параметрах и малых относительных скоростях v'' время столкновения велико. За это время частицы могут испытывать соударения с посторонними частицами, вследствие которых относительная скорость v'' не остается постоянной и столкновение фактически происходит при некоторой средней величине v'', которая тем больше, чем длительнее столкновение. Изменение скорости за время свободного пробега τ по порядку величины равно средней скорости $v_0 = \sqrt{\frac{2T}{m_1}}$. Время изменения v'' на величину порядка самой v'' ($< v_0$) равно

$$t \sim \tau \frac{v''}{v_0}. \qquad (1.34)$$

Уравнение (1.34) определяет минимальное значение относительной скорости, которое может сохраняться в течение времени t. Подставляя в (1.34) вместо t время столкновения t_0 (которое само зависит от v''), получим значение минимальной скорости для данного прицельного параметра R

$$t_0 \sim \frac{R}{v''_{\text{мин}}} \sim \tau \frac{v''_{\text{мин}}}{v_0}, \text{ т. е. } v''_{\text{мин}}(R) = \sqrt{\frac{R v_0}{\tau}}. \qquad (1.35)$$

---

* Можно показать, что следует брать среднее геометрическое между дрейфовой скоростью на минимальном и максимальном (в рассматриваемой области) прицельном параметре.

В области прицельных параметров $\rho_2 < R < d$ в качестве среднего значения $v''_{\text{мин}}(R)$ следует взять значение $v''_{\text{мин}}$ при $R \sim \sqrt{\bar{\rho}_2 d}$, т. е.

$$\overline{v''_{\text{мин}}} \sim \left(\frac{\bar{\rho}_2 d v_0^2}{\tau^2}\right)^{1/4}, \tag{1.36}$$

которое обычно больше (1.33).

Выпишем окончательные выражения для коэффициента диффузии. Из (1.24), (1.26), (1.29), (1.36) следует

$$D = D_0 \ln \frac{Td}{|e_1 e_2|} \quad (d < \rho_1 \ll \rho_2),$$

$$D = D_0 \left\{\ln \frac{T\bar{\rho}_1}{|e_1 e_2|} + \frac{3}{4} \ln \frac{m_2}{m_1} \ln \frac{d}{\bar{\rho}_1}\right\} \quad (\rho_1 < d < \rho_2),$$

$$D = D_0 \left\{\ln \frac{T\bar{\rho}_1}{|l_1 l_2|} + \frac{3}{8}\left(\ln \frac{m_2}{m_1}\right)^2 + \frac{3}{4} \ln \frac{d}{\bar{\rho}_2} \ln \frac{\omega_1 \tau_1 \bar{\rho}_1}{\sqrt{\bar{\rho}_2 d}}\right\}$$

$$(\rho_1 \ll \rho_2 < d), \tag{1.37}$$

где

$$D_0 = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{e_1^2 e_2^2 n_2}{m_1^{3/2} T^{1/2} \omega_1^2}; \quad \bar{\rho} = \sqrt{\frac{2T}{m\omega^2}}; \quad \tau_1 \sim \frac{\sqrt{m_1 T^3}}{e_1^4 n_1 \ln \frac{T\bar{\rho}_1}{e_1^2}}.$$

§ 2. Неоднородное магнитное поле

2. 1. Динамика частицы. В случае неоднородного магнитного поля фаза частицы на ларморовской орбите уже не является угловой переменной, так как скорость вращения меняется от точки к точке. Роль угловой переменной играет фаза усредненного (за несколько оборотов) вращения частицы ϑ. Роль медленных переменных играют усредненные значения $\boldsymbol{r}^0$, v'' и ρ (но не их мгновенные значения). Усредненные по ϑ уравнения движения с учетом только линейных по градиентам членов имеют вид (см., например, [7])

$$\dot{v}'' = -\frac{1}{2} v^{\perp 2} \left(\boldsymbol{h} \frac{\nabla H}{H}\right),$$

$$\dot{v}^{\perp} = \frac{1}{2} v'' v^{\perp} \left(\boldsymbol{h} \frac{\nabla H}{H}\right), \tag{2.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}^0 = \left\{v'' - \frac{v^{\perp 2}}{2\omega} (\boldsymbol{h} \operatorname{rot} \boldsymbol{h})\right\} \boldsymbol{h} + \frac{v''^2}{\omega} [(\boldsymbol{h}\nabla)\, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}] - \frac{v^{\perp 2}}{2\omega} \left[\boldsymbol{h} \frac{\nabla H}{H}\right].$$

Все величины, входящие в (2.1), имеют смысл усредненных по ϑ. $\omega = -\frac{eH}{mc}$ и $\boldsymbol{h}$ — единичный вектор по направлению

поля ($\mathbf{H} = H\mathbf{h}$) — теперь зависят от $\boldsymbol{r}^0$. Если вместо $v^\perp$ ввести переменную $I = \frac{mv^{\perp 2}}{2\omega}$, то для нее из (2.1) следует $\dot{I} = 0$ (как и следовало ожидать для переменной действия). Уравнение (2.1) определяют величины $\dot{Y}^\alpha$, входящие в уравнение (3). Связь «медленных» переменных $\boldsymbol{r}^0$, v'', $v^\perp$ (I) и фазы ϑ с переменными $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$ в пренебрежении градиентами магнитного поля можно записать в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^0 + \frac{v^\perp}{\omega}\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{r}^0 + \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\,\boldsymbol{\nu},$$

$$\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{h} + v^\perp[\boldsymbol{h}\boldsymbol{\nu}] = v''\boldsymbol{h} + \sqrt{\frac{2I\omega}{m}}\,[\boldsymbol{h}\boldsymbol{\nu}], \qquad (2.2)$$

где $\boldsymbol{\nu} = (\cos\vartheta,\ \sin\vartheta,\ 0)$ — единичный вектор, препендикулярный к $\boldsymbol{h}$ и вращающийся с усредненной частотой ω.

2. 2. Гидродинамическое приближение. Умножим уравнение (3) на $\sqrt{G_1}$ и проинтегрируем по I_1, v_1''. Используя равенство $n = \int F\sqrt{G}dIdv''$, где n — плотность, получим в левой части (3) $\frac{\partial n}{\partial t}$. Справа исчезнут члены с производными по I_1 и v_1''. В результате получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div}_0 \boldsymbol{i}_0, \qquad (2.3)$$

где плотность потока в трехмерном координатном пространстве $\boldsymbol{i}_0$, как следует из (4), равна

$$\boldsymbol{i}_0 = \int \boldsymbol{j}^{\mathbf{r}^0}\sqrt{G_1}dI_1dv_1'' = \int \dot{\mathbf{r}}_1^0 F_1\sqrt{G_1}dI_1dv_1'' + \int [\langle U + U_c\rangle;\ \boldsymbol{r}_1^0] \times$$

$$\times F_1\sqrt{G_1}dI_1dv_1'' - \frac{1}{2}\int\Big(\langle\Delta\boldsymbol{r}_1^0\Delta Y_1^\beta\rangle\frac{\partial F_1}{\partial Y_1^\beta}F_2 +$$

$$+\langle\Delta\boldsymbol{r}_1^0\Delta Y_2^\beta\rangle\frac{\partial F_2}{\partial Y_2^\beta}F_1\Big)\sqrt{G_1G_2}dY_2dI_1dv_1''. \qquad (2.4)$$

Первые два члена в (2.4) дают упорядоченный поток от градиентов магнитного поля и самосогласованного поля. Третий член соответствует диффузионному потоку от столкновений.

Умножим теперь (3) на $\sqrt{G_1}E_1(I_1v_1''\boldsymbol{r}_1^0)$, где E_1 — энергия частицы, и проинтегрируем затем по I_1 и v_1''. Слева получим

при этом $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$, где $\varepsilon = \int EF\sqrt{G}dIdv''$ — энергия единицы объема
В правой части

$$-\int E_1 \frac{\partial}{\partial Y_1^\alpha}\left(\sqrt{G_1}\, j^{r\alpha}\right) dI_1 dv_1'' = -\int E_1 \frac{\partial}{\partial I_1}\left(\sqrt{G_1} j^I\right) dI_1 dv_1'' -$$

$$-\int E_1 \frac{\partial}{\partial v_1''}\left(\sqrt{G_1} j^{v''}\right) dI_1 dv_1'' - \int E_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1^0}\left(\sqrt{G_1}\boldsymbol{j}^{\mathbf{r}^0}\right).$$

Проинтегрируем первые два члена по частям, после чего правую часть можно записать в виде

$$\int \frac{\partial E}{\partial Y_1^\alpha} j^{r\alpha}\sqrt{G_1}dI_1dv_1'' - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1^0}\int E_1 \boldsymbol{j}^{\mathbf{r}^0}\sqrt{G_1}dI_1dv_1''.$$

В результате получаем уравнение теплового потока

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}\right)_{st} - \mathrm{div}_0\, \boldsymbol{q}, \tag{2.5}$$

где

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}\right)_{st} = \int \frac{\partial E_1}{\partial Y_1^\alpha} j^{r\alpha}\sqrt{G_1}dI_1dv_1'' = \int \left[\langle U + U_c\rangle;\ E_1\right] F_1\sqrt{G_1}dI_1dv_1'' -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{\partial E_1}{\partial Y_1^\alpha}\left(\langle \Delta Y_1^\alpha \Delta Y_1^\beta\rangle \frac{\partial F_1}{\partial Y_1^\beta} F_2 + \langle \Delta Y_1^\alpha \Delta Y_2^\beta\rangle \frac{\partial F_2}{\partial Y_2^\beta} F_1\right) \times$$

$$\times \sqrt{G_1 G_2}\, dY_2 dI_1 dv_1'', \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{q} = \int E_1 \boldsymbol{j}^{\mathbf{r}^0}\sqrt{G_1}dI_1dv_1'' = \int E_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1^0 F_1\sqrt{G_1}dI_1dv_1'' + \int E_1\left[\langle U + \right.$$

$$\left. + U_c\rangle;\ \boldsymbol{r}_1^0\right] F_1\sqrt{G_1}dI_1dv_1'' - \frac{1}{2}\int E_1\left(\langle \Delta \boldsymbol{r}_1^0 \Delta Y_1^\alpha\rangle \frac{\partial F_1}{\partial Y_1^\alpha} F_2 + \right.$$

$$\left. + \langle \Delta \boldsymbol{r}_1^0 \Delta Y_2^\beta\rangle \frac{\partial F_2}{\partial Y_2^\beta} F_1\right)\sqrt{G_1 G_2}\, dY_2 dI_1 dv_1''. \tag{2.7}$$

(При получении (2.6) было использовано условие сохранения энергии частицы $\frac{\partial E_1}{\partial Y_1^\alpha}\dot{Y}_1^\alpha = \dot{E}_1 = 0$.)

Уравнение (2.5) выражает собой закон сохранения энергии. Изменение энергии единицы объема, как следует из (2.5), происходит вследствие конвекционного потока $\boldsymbol{q}$, а также и без изменения положения ларморовских центров (член $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_{st}$). Последнее может происходить, во-первых, путем передачи энергии частицами другого сорта, а во-вторых,

в результате столкновений с частицами того же сорта, но ларморовские центры которых лежат вне данного объема.

Вследствие малости столкновительного члена ($\sim(\omega\tau)^{-1}$) можно рассмотреть сначала потоки ларморовских кружков и энергии, пренебрегая столкновениями (и самосогласованным полем). Из (2.4) и (2.7) в этом приближении получаем:

$$\boldsymbol{i}^0=\int \dot{\boldsymbol{r}}^0 F\sqrt{G}\,dI\,dv'', \quad \boldsymbol{q}^0=\int E\dot{\boldsymbol{r}}^0 F\sqrt{G}\,dI\,dv''. \tag{2.8}$$

Так как $\dot{\boldsymbol{r}}^0$ пропорционально градиенту магнитного поля (см. (2.1)), то для $\sqrt{G}$ можно взять значение для однородного поля $\sqrt{G}=m^2\omega$. Используя (2.1), получаем:

$$\boldsymbol{i}^0=\overline{nv''}\boldsymbol{h}-\frac{n}{m}\bar{I}\left[\boldsymbol{h}\frac{\nabla H}{H}\right]-\frac{n}{\omega}\overline{v''^2}\,[\boldsymbol{h},\ (\boldsymbol{h}\nabla)\,\boldsymbol{h}]-$$

$$-\frac{n}{m}-\bar{I}\,(\boldsymbol{h}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h})\,\boldsymbol{h}, \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{q}^0=n\overline{Ev''}\boldsymbol{h}-\frac{n}{m}\overline{EI}\left[\boldsymbol{h}\frac{\nabla H}{H}\right]-\frac{n}{\omega}\overline{Ev''^2}\,[\boldsymbol{h},\,(\boldsymbol{h}\nabla)\,\boldsymbol{h}]-$$

$$-\frac{n}{m}\overline{EI}\,(\boldsymbol{h}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h})\,\boldsymbol{h}, \tag{1.10}$$

где черта означает усреднение по распределению. Для максвелловского распределения (без упорядоченной скорости вдоль $\boldsymbol{H}$) получаем:

$$\boldsymbol{i}^0=-\frac{nT}{m\omega}\left\{\left[\boldsymbol{h}\frac{\nabla H}{H}\right]+[\boldsymbol{h},\,(\boldsymbol{h}\Delta)\,\boldsymbol{h}]+(\boldsymbol{h}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h})\,\boldsymbol{h}\right\}, \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{q}^0=\frac{5}{2}T\boldsymbol{i}^0. \tag{2.12}$$

Первый член в (2.11) соответствует магнитному дрейфу, второй член — центробежному.

Потоки, связанные со столкновениями и вызываемые градиентами плотности и температуры, вообще говоря, малы по сравнению с (2.11) и (2.12) как $(\omega\tau)^{-1}$. Однако они могут быть существенны для процессов переноса в направлениях, перпендикулярных к магнитным потокам. Обычно влиянием градиентов магнитного поля на столкновения можно пренебречь, и задача сводится к вычислению столкновительных потоков в однородном магнитном поле. Здесь мы не будем решать эту задачу. Выше было достаточно подробно проведено вычисление коэффициента диффузии. Остальные коэффициенты переноса могут быть вычислены подобным же образом с помощью формул (1.5)—(1.16).

2.3. *Плотность электрического тока.* При решении задач с самосогласованным полем приходится наряду с кинетическим уравнением рассматривать также уравнения Максвелла, в которые входит плотность электрического тока $\mathbf{j}^e$. Введенная выше величина $\mathbf{i}$ имеет смысл потока ларморовских кружков, поэтому $e\mathbf{i}$ не совпадает с $\mathbf{j}^e$. Последний складывается из $e\mathbf{i}$ и тока, образуемого вращающимися по ларморовским орбитам зарядами.

Плотность электрического тока в точке $\mathbf{r}'$ определяется выражением

$$\mathbf{j}^e(\mathbf{r}') = e\int f'\dot{\mathbf{r}}d\mathbf{p}, \tag{2.13}$$

которое можно записать в виде

$$\mathbf{j}^e(\mathbf{r}') = e\int f\dot{\mathbf{r}}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\,d\mathbf{p}d\mathbf{r}.$$

Перейдем под интегралом к переменным $\mathbf{r}^0$, I, v'' и ϑ. С точностью до $(\omega\tau)^{-1}$ можно считать f не зависящей от ϑ и заменить ее на $F/2\pi$, где F — функция распределения по «медленным» переменным I, v'' и $\mathbf{r}^0$. Пренебрегая градиентами магнитного поля и используя (2.2), получим

$$\mathbf{j}^e(\mathbf{r}') = \frac{e}{2\pi}\int\left(\dot{\mathbf{r}}^0 + \sqrt{\frac{2I\omega}{m}}[\mathbf{h}\boldsymbol{\nu}]\,\delta\left(\mathbf{r}'-\mathbf{r}^0-\sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\,\boldsymbol{\nu}\right)\right)\times$$
$$\times F\sqrt{G}\,d\mathbf{r}^0 dI dv'' d\vartheta,$$

где $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ исключено согласно равенству $\dot{\boldsymbol{\nu}} = [\mathbf{h}\boldsymbol{\nu}]\omega$. Разложим δ-функцию в ряд по $\sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sim \rho$. При интегрировании по ϑ линейные члены по $\sqrt{\frac{2I}{m\omega}}$ обратятся в нуль. Ограничиваясь квадратичными членами, получаем

$$\mathbf{j}^e(\mathbf{r}') = e\int \dot{\mathbf{r}}^0\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}^0)\,F\sqrt{G}\,dI dv''d\mathbf{r}^0 -$$
$$-e\frac{\partial}{\partial r'_\beta}\int\frac{2I}{m}\langle[\mathbf{h}\boldsymbol{\nu}]_\beta\rangle\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}^0)\,F\sqrt{G}\,dI dv''d\mathbf{r}^0.$$

Первый член есть поток ларморовских кружков $e\mathbf{i}$. Во втором члене усреднение по ϑ (т. е. по $\boldsymbol{\nu}$) с учетом равенства $\langle\nu_\alpha\nu_\beta\rangle = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\beta} - h_\alpha h_\beta)$ дает

$$\langle[\mathbf{h}\boldsymbol{\nu}]_\alpha\nu_\beta\rangle = \varepsilon_{\alpha\gamma\delta}h_\gamma\langle\nu_\delta\nu_\beta\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\gamma\beta}h_\gamma.$$

В результате получаем

$$\mathbf{j}^e(\mathbf{r}') = e\mathbf{i}(\mathbf{r}') + \operatorname{rot}' \int \frac{eI}{m} \mathbf{h} F \sqrt{G}\, dI dv'' =$$

$$= e\mathbf{i} + \operatorname{rot}' \left(\frac{en}{m} \overline{I} \mathbf{h} \right). \qquad (2.14)$$

Для масквелловского распределения

$$\mathbf{j}^e(\mathbf{r}) = e\mathbf{i}(\mathbf{r}) + c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \qquad (2.15)$$

где

$$\mathbf{M} = \frac{enT}{mc\omega} \mathbf{h} = -\frac{nT}{H^2} \mathbf{H}. \qquad (2.16)$$

Выражение (2.15) имеет тот же вид, что и связь между микроскопическим током и усредненным макроскопическим током в электродинамике. Вектор $\mathbf{M}$ имеет смысл среднего магнитного момента единицы объема.

Таким образом, при решении задач с самосогласованным полем можно пользоваться усредненным (по ларморовскому вращению) током $e\mathbf{i}$, но рассматривать при этом уравнения Максвелла в диамагнитной среде с намагниченностью $\mathbf{M}$, т. е. с магнитной проницаемостью

$$\mu = 1 - \frac{4\pi nT}{H^2}. \qquad (2.17)$$

2.4. *Пример многих быстрых переменных.* Возможны такие конфигурации неоднородных магнитных полей, в которых дрейфовые движения ларморовских кружков финитны. Если при этом столкновения настолько редки, что для частоты финитного движения Ω выполняется условие $\Omega\tau \gg 1$, то такое движение также является быстрым и открывается возможность дальнейшего упрощения кинетического уравнения (3) методом исключения быстрых переменных.

Уравнение (3) может быть записано в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}}^0 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}^0} + \dot{v}'' \frac{\partial F}{\partial v''} = st(F), \qquad (2.18)$$

где $st(F)$ — член, описывающий столкновения и движение в самосогласованном поле. Уравнение (2.18) по форме аналогично обычному уравнению Больцмана (1), но с меньшим числом переменных. Левая часть (2.18) также связана с механическим движением, но теперь не частицы, а ларморовского кружка. При исключении быстрых переменных из уравнения (1) использовалось то обстоятельство, что механическое движение частиц описывается гамильтоновским формализмом. Движение ларморовского кружка (2.1), вообще говоря, не мо-

жет быть описано с помощью гамильтониана. Поэтому исключение быстрых переменных из уравнения (2.18) в общем случае нельзя провести описанным выше методом*. Мы рассмотрим частный случай, когда этот метод оказывается применимым.

Рассмотрим аксиально симметричное магнитное поле, удовлетворяющее условию

$$\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=0. \tag{2.19}$$

Введем систему координат, образованную магнитными силовыми линиями и семейством ортогональных к ним траекторий (существующих при выполнении условия (2.19)). Пусть ось x^3 направлена вдоль $\mathbf{H}$, x^2 — по углу φ, а x^1 — в направлении от оси. Обозначим через $a_1a_2a_3$ коэффициенты Ламэ, отвечающие этим координатам

$$ds^2=a_1^2(dx^1)^2+a_2^2(dx^2)^2+a_3^2(dx^3)^2. \tag{2.20}$$

Компоненты $\mathbf{H}$ по выбранным осям (физические составляющие) равны $H_1=H_2=0$, а $H_3(x^1x^3)=H$. Условие $\mathrm{div}\,\mathbf{H}=0$ принимает вид $\frac{\partial}{\partial x^3}(a_1a_2H)=0$. Уравнения движения ларморовского кружка получим из (2.1), рассматривая все векторные операции в криволинейных координатах x^α и учитывая, что H и a_α не зависят от x^2,

$$\dot{x}^1=0;\quad \dot{x}^2=\frac{v''_2}{\omega}\frac{1}{a_1a_2a_3}\frac{\partial a_3}{\partial x^1}-\frac{I}{m}\frac{1}{a_1a_2H}\frac{\partial H}{\partial x^1};$$

$$\dot{x}^3=\frac{v''}{a_3};\quad \dot{v}''=-\frac{I\omega}{m}\frac{1}{a_3H}\frac{\partial H}{\partial x^3};\quad \dot{I}=0. \tag{2.21}$$

Переменная I при механическом движении ларморовского кружка остается постоянной и входит в (2.21) только в качестве параметра. Из остальных переменных можно составить две пары канонических переменных и получить уравнения Гамильтона, эквивалентные (2.21). Нетрудно проверить, что переменные

$$\begin{aligned} p_1&=m\omega a_1a_2x^2,\quad q_1=x^1,\\ p_3&=ma_3v'',\quad q_3=x^3 \end{aligned} \tag{2.22}$$

сопряжены и удовлетворяют каноническим уравнениям с функцией Гамильтона

$$\mathscr{H}=I\omega(q_1q_3)+\frac{p_3^2}{2ma_3^2(q_1q_3)}. \tag{2.23}$$

* В общем случае нельзя указать способа отыскания переменных, которые при механическом движении кружка линейно меняются со временем (аналог угловых переменных, по которым следует производить усреднение уравнения).

Переменная p_1 — циклическая, поэтому уравнения движения полностью разрешимы в квадратурах.

Общий характер движения в рассматриваемом случае можно легко понять из (2.21) и (2.23). При движении кружок не сходит с поверхности вращения $x^1 = \text{const}$. На этой поверхности он вращается по координате x^2 (угол φ), причем скорость этого вращения Ω_2 зависит от номера поверхности x^1 и от «широты» x^3. Кроме того, кружок движется по оси x^3. Это движение, как легко получить из (2.21), происходит по закону

$$t = \int \frac{a_3 dx^3}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - I\omega)}}, \qquad (2.24)$$

где $E = \text{const}$ — полная энергия кружка. Если при $x^3 \to \pm\infty$ поле падает, то, как видно из (2.24), движение инфинитно. При возрастании поля движение вплоть до некоторого значения полной энергии оказывается финитным [8]. В последнем случае частоту движения обозначим через Ω_3. Она зависит только от x^1.

Если выполняется условие $\Omega_2\tau \gg 1$, то переменная x^2 — быстрая и ее можно исключить обычным способом, после чего уравнение будет содержать только оставшиеся медленные переменные. Если, кроме того, выполняется условие $\Omega_3\tau \gg 1$, то быстрой переменной является также фаза колебаний по оси x^3. В этом случае система будет характеризоваться только тремя переменными, например I, x^1 и E.

В заключение хочу выразить благодарность Г. И. Будкеру, которому принадлежит общая идея данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Будкер, С. Т. Беляев, см. т. II настоящего издания, стр. 330.
2. С. Т. Беляев, см. настоящий том, стр. 50.
3. S. Chapman, T. G. Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge, 1939.
4. Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ, **32**, 1176 (1957).
5. Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ, **7**, 390, (1937).
6. K. M. Watson, Phys. Rev., **102**, 12 (1956).
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., Гостехиздат, 1955, стр. 367.
8. L. Spitzer, Physics of fully ionized gases, N. Y. Interscience Publishers, 1956.