С. Т. Беляев

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ В СИЛЬНЫХ ПОЛЯХ*

Обосновывается метод получения приближенного кинетического уравнения для разреженных ионизованных газов в сильных внешних полях. Малым параметром приближения является отношение периода собственных колебаний частиц во внешнем поле к времени свободного пробега. Приближенное уравнение имеет вид уравнения Фоккера-Планка с меньшим числом переменных.

В [1] был указан метод упрощения кинетического уравнения для газа заряженных частиц при редких столкновениях и при помощи упрощенного уравнения решена конкретная задача о стационарном состоянии стабилизированного электронного пучка. В [2] указанным методом решена еще одна задача. Цель настоящей работы — обобщение и обоснование приближения для кинетического уравнения, применимого в случае редких столкновений. Рассматриваемое приближение — своего рода обратный предельный случай хорошо известного гидродинамического приближения для кинетического уравнения [3].

Мы будем рассматривать ионизованный газ малой плотности, находящийся в сильном внешнем поле**, когда столкновения происходят редко по сравнению с характерным временем механического движения частиц в поле. Для инфинитного движения таким временем является время прохождения частицей всего объема. Если оно меньше времени свободного

* Работа выполнена в 1955 г.

** Для неионизованного газа практически нельзя создать сильного внешнего поля.

пробега τ, то столкновениями, вообще, можно пренебречь и задача становится чисто механической (кнудсеновский случай). Представляют интерес поэтому только такие поля, движение частиц в которых финитно, хотя бы по одной координате. В этом случае характерным временем является $1/\omega$, где ω — частота финитного движения. Условие редкости столкновений принимает вид

$$\omega\tau \gg 1. \tag{1}$$

Финитные координаты, частоты движения по которым удовлетворяют условию (1), будем называть «быстрыми». Поставим задачу: получить уравнение для усредненной по быстрым переменным функции распределения. Усредненное кинетическое уравнение должно описывать медленные процессы. Последние могут быть, во-первых, следствием столкновений, а во-вторых, движением во внешнем поле по оставшимся «медленным» переменным. Пример для иллюстрации: в сильном магнитном поле с малой неоднородностью быстрым движением является ларморовское вращение. Усредненное по этому вращению кинетическое уравнение должно описывать медленное движение центров ларморовских кружков (дрейф) и изменение их радиусов от действия столкновений и градиентов поля.

В первой части «усредненное» уравнение получается как первое приближение по параметру $(\tau\omega)^{-1}$ из обычного кинетического уравнения. Во второй части кинетические явления в разреженном газе рассматриваются как стохастические процессы в пространстве медленных переменных, для которых выводится уравнение Фоккера—Планка. Устанавливается тождественность последнего с уравнением, полученным в первой части. В заключение рассмотрен простой пример (расплывание электронного пучка при прохождении через газ в продольном магнитном поле). В следующей статье полученное уравнение применяется к случаю ионизованного газа в сильном магнитном поле.

§ 1

Запишем кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [\mathcal{H}; f] = st\,(f), \tag{1.1}$$

где $\mathcal{H}$ — функция Гамильтона для частицы во внешнем поле, $[;]$ — скобки Пуассона, а $st\,(f)$ — столкновительный член. В качестве переменных функции распределения f выберем для быстрых финитных степеней свободы переменные действия I^α и сопряженные им угловые переменные ϑ^α (фазы) гамильтониана $\mathcal{H}$, а для остальных степеней свободы —

произвольные канонические переменные P и Q. Совокупность всех медленных переменных будем обозначать $X=(I, P, Q)$, а полный набор канонических переменных — $x=(pq)=(X\vartheta)$.

При рассмотрении быстрых процессов в (1.1) можно пренебречь столкновительным членом и членами с производными от медленных переменных X:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\omega^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial \vartheta^{\alpha}}=0; \quad \omega^{\alpha}(X)=\frac{\partial \mathcal{H}(X)}{\partial I^{\alpha}}. \tag{1.2}$$

Общим решением (1.2) служит произвольная функция X и «начальных фаз» $\vartheta^{\alpha}-\omega^{\alpha}t$, определяемая начальными условиями. Существенно, что зависимость от фаз в функции распределения быстро (за время $\sim 1/\omega$) исчезает. Этот быстрый процесс «размешивания» по фазам легко понять на простом примере. Рассмотрим одномерный случай с начальным распределением $f_0(I\vartheta)=F(I)\,\delta(\vartheta)$ (все частицы имеют одну и ту же фазу). В последующие моменты функция распределения будет $f_t=F(I)\,\delta(\vartheta-\omega(I)\,t)$. Все частицы с равными значениями I по-прежнему имеют одинаковые фазы, но разным I соответствуют разные фазы. Если рассматривать распределение по ϑ, усредненное по интервалу ΔI, то оно быстро расплывается $\left(\text{ширина распределения по фазам } \sqrt{\overline{\Delta\vartheta^2}}\sim t\frac{\partial\omega}{\partial I}\Delta I\right)$. Таким образом, отвлекаясь от короткого процесса «размешивания» по фазам, можно считать, что в этом приближении f не зависит от ϑ.

В следующем приближении в (1.1) следует учесть «медленные» члены, в которые можно подставить функцию распределения f^0, не зависящую от фаз,

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\omega^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial \vartheta^{\alpha}}+[\mathcal{H};\, f^0]_{(PQ)}=st\,(f^0). \tag{1.3}$$

Если искать решение (1.3) обычным методом теории возмущений, полагая $f=f^0+f^{(1)}$ и $f^{(1)}\ll f^0$, то мы получим правильный результат лишь для малых времен (f^0 не зависит от времени, поэтому все изменение начального распределения заключено в малом добавке $f^{(1)}$). Для описания длительных медленных процессов следует применять другие методы решения.

Как видно из (1.3), в этом приближении f уже зависит от фаз (столкновительный член, помимо функциональной зависимости от f, содержит прямую зависимость от всех переменных, в том числе и от фаз). Если формально усреднить (1.3) по ϑ и отождествить усредненную функцию распреде-

ления $\langle f\rangle_{\psi}$ с f^0, то получим уравнение, не содержащее быстрых переменных,

$$\frac{\partial f^0}{\partial t}+[\mathcal{H};\ f^0]_{(PQ)}=\langle st\,(f^0)\rangle_{\psi}. \tag{1.4}$$

Этот вывод [1] иллюстрирует основную идею приближения. Перейдем теперь к строгому решению задачи.

Будем исходить из кинетического уравнения для заряженных частиц, полученного Н. Н. Боголюбовым [4] *,

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+[\mathcal{H};\ f_1]+\int[\Phi;\ f_1f_2]\,dx_2=\int\Big[\Phi;\Big[\int\limits_0^{\infty}S^0_{-t'}\Phi dt';\ f_1f_2\Big]\Big]dx_2. \tag{1.5}$$

Здесь $\Phi=\Phi(x_1x_2)$ — потенциал парного взаимодействия частиц, а $S^0_t=S^0(t;\ 0)$ — классический аналог S-матрицы, т. е. оператор, заменяющий переменные x на их значения через промежуток времени t, причем закон изменения определяется гамильтонианом $\mathcal{H}$.

Удобно несколько преобразовать уравнение (1.5). Пользуясь известными свойствами циклических перестановок для скобок Пуассона и формулой

$$[A;B]=[A;\ x^{\alpha}]\frac{\partial B}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}([A;\ x^{\alpha}]B), \tag{1.6}$$

справедливой для канонически сопряженных переменных x^{α}, приведем (1.5) к виду

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+[\mathcal{H};\ f_1]+[U(f);\ f_1]+[U_c(f);\ f_1]=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha}}\int\left((x_1^{\alpha}|x_1^{\beta})\frac{\partial f_1}{\partial x_1^{\beta}}f_2+(x_1^{\alpha}|x_2^{\beta})\frac{\partial f_2}{\partial x_2^{\beta}}f_1\right)dx_2, \tag{1.7}$$

где

$$(x_i^{\alpha}|x_k^{\beta})=[\Phi;\ x_i^{\alpha}][\Psi;\ x_k^{\beta}]+[\Psi;\ x_i^{\alpha}][\Phi;\ x_k^{\beta}];$$

$$\Psi=\int\limits_0^{\infty}S^0_{-t'}\Phi dt', \tag{1.8}$$

$$U(f)=\int\Phi f_2dx_2;\quad U_c(f)=-\frac{1}{2}\int[\Phi;\ \Psi]f_2dx_2. \tag{1.9}$$

---

* В [4] уравнение (1.5) получено для случая $\mathcal{H}=p^2\,2m$, но нетрудно проследить, что оно справедливо и при наличии внешних полей.

В (1.7) мы выделили из столкновительного члена часть с самосогласованным полем от своеобразного «коррелятивного потенциала»

$$\Phi_c = -\frac{1}{2}[\Phi;\ \Psi] = -\frac{1}{2}\left[\Phi;\ \int_0^\infty S_{-t'}\Phi dt'\right]. \qquad (1.10)$$

Предпоследний член левой части (1.7) учитывает обычное самосогласованное поле $U(f)$, которое мы будем считать малым по сравнению с внешними полями. Это охватывает и тот случай, когда U не мало, но его главную часть U_0 можно рассматривать как внешнее поле. (В частности, это относится к задачам о малых колебаниях в системе, где выделяется постоянная часть самосогласованного поля.) В этом случае мы будем считать, что $\mathcal{H}$ включает также и U_0.

Для решения уравнения (1.7) воспользуемся методом, применяемым в нелинейной механике [5]. Ищем решение (1.7) в виде ряда

$$f(xt) = f^0(Xt) + f^{(1)}(X\vartheta;\ f^0) + f^{(2)}(X\vartheta;\ f^0) + \ldots, \qquad (1.11)$$

где средние значения от $f^{(k)}$ по ϑ обращаются в нуль:

$$\langle f^{(k)}\rangle_\vartheta = 0 \qquad (k \geqslant 1). \qquad (1.12)$$

Функцию $f^0(Xt)$, имеющую смысл усредненной по ϑ функции распределения, определим уравнением

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} = A^{(1)}(X;\ f^0) + A^{(2)}(X;\ f^0) + \ldots \qquad (1.13)$$

Величины $f^{(k)}$ и $A^{(k)}$ выберем из условия, чтобы (1.11) удовлетворяло кинетическому уравнению (1.7) с точностью до высших порядков малости (по столкновительному члену и самосогласованному полю). Подставляя (1.11) и (1.13) в (1.7) и приравнивая члены первого порядка, получаем:

$$A^{(1)}(X;\ f^0) + [\mathcal{H};\ f_1^0]_{(PQ)} + [\mathcal{H};\ f_1^{(1)}]_{(I\vartheta)} + [U(f^0) + U_c(f^0);\ f_1^0] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}\int\left((x_1^\alpha \mid X_1^\beta)\frac{\partial f_1^0}{\partial X_1^\beta}f_2^0 + (x_{1/}^\alpha X_2^\beta)\frac{\partial f_2^0}{\partial X_2^\beta}f_1^0\right)dx_2. \qquad (1.14)$$

$A^{(1)}$ и $f^{(1)}$ определяются из (1.14) приравниванием постоянных и чисто периодических частей по ϑ. Усредняя (1.14) по ϑ, получим для $A^{(1)}$:

$$A^{(1)}(X;\ f^0) = -[\mathcal{H};\ f_1^0] - [\langle U(f^0) + U_c(f^0)\rangle;\ f_1^0] +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_1^\alpha}\int\left(\langle X_{1/}^\alpha X_1^\beta\rangle\frac{\partial f_1^0}{\partial X_1^\beta}f_2^0 + \langle X_{1/}^\alpha X_2^\beta\rangle\frac{\partial f_2^0}{\partial X_2^\beta}f_1^0\right)dx_2. \qquad (1.15)$$

Приравнивая в (1.14) периодические по ϑ члены, получим для определения $f^{(1)}$ уравнение

$$T_\vartheta^{-1} f_1^{(1)} \equiv [H;\ f_1^{(1)}]_{(l\vartheta)} = -[\{U(f^0) + U_e(f^0)\};\ f_1^0] + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}\int\left(\{x_1^\alpha/X_1^\beta\}\frac{\partial f_1^0}{\partial X_1^\beta} f_2^0 + \{x_1^\alpha/X_2^\beta\}\frac{\partial f_2^0}{\partial X_2^\beta} f_1^0\right) dx_2, \qquad (1.16)$$

где $\{\varphi\} = \varphi - \langle\varphi\rangle$ означает периодическую по ϑ часть φ. Из (1.16) для f^1 находим

$$f_1^{(1)} = -[T_\vartheta\{U(f^0) + U_e(f^0)\};\ f_1^0] + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}\int\left(T_\vartheta\{x_1^\alpha/X_1^\beta\}\frac{\partial f_1^0}{\partial X_1^\beta} f_2^0 + T_\vartheta\{x_1^\alpha/X_2^\beta\}\frac{\partial f_2^0}{\partial X_2^\beta} f_1^0\right) dx_2. \qquad (1.17)$$

Действие оператора T_ϑ на периодические функции ϑ можно представить в виде

$$B(\vartheta) = \sum_{n\neq 0} B_n e^{i(n\vartheta)};\quad T_\vartheta B = \sum_{n\neq 0}\frac{B_n}{(n\omega)} e^{i(n\vartheta)},$$

откуда непосредственно видно, что $T_\vartheta \sim 1/\omega$.

С точностью до высших приближений по $(\omega\tau)^{-1}$ усредненная функция распределения f^0 определяется из (1.13) и (1.15)

$$\frac{\partial f_1^0}{\partial t} + [\mathscr{H} + \langle U(f^0) + U_e(f^0)\rangle;\ f_1^0] = \\ = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_1^\alpha}\int\left(\langle X_1^\alpha/X_1^\beta\rangle\frac{\partial f_1^0}{\partial X_1^\beta} f_2^0 + \langle X_1^\alpha/X_2^\beta\rangle\frac{\partial f_2^0}{\partial X_2^\beta} f_1^0\right) dx_2, \qquad (1.18)$$

а $f^{(1)}$ — первая периодическая по ϑ поправка к функции распределения, имеющая порядок $(\omega\tau)^{-1}$ — определяется через f^0 согласно (1.16). Таким образом, задача свелась к нахождению усредненной функции f^0, удовлетворяющей уравнению с меньшим числом переменных (быстрые переменные исключены). Заметим, что уравнение (1.18) формально получается усреднением по ϑ исходного кинетического уравнения (1.7), если считать при этом функцию распределения f не зависящей от ϑ.

Рассмотрим частный случай быстрых столкновений, когда время столкновения частиц $t_0 \sim r_0/\vartheta$ мало по сравнению с периодом финитного движения, т. е. $\omega t_0 \ll 1$ (r_0 — область взаимодействия частиц). В этом случае можно пренебречь влиянием внешнего поля на процесс соударения, что достигается заменой оператора S_{-t}^0, входящего в Ψ, на соответ-

ствующий оператор для свободного движения. При проведении конкретных вычислений удобно (используя замечание в конце предыдущего абзаца) исходить из уравнения (1.7), а затем усреднить результат по ϑ. В нулевом приближении по r_0 самосогласованное поле U и U_e обращается в нуль. Принимая во внимание, что

$$\Phi = \Phi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \int \Phi(k) \exp\{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\}\, d\mathbf{k},$$

$$[S^0_{-t}\Phi = \Phi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - t\mathbf{p}_1/m_1 - t\mathbf{p}_2/m_2|),$$

получаем в этом приближении для столкновительного члена (в декартовых координатах)

$$\frac{\partial}{\partial p_1^\alpha}\int dp_2 w^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial f_1^0}{\partial p_1^\beta} f_2^0 - \frac{\partial f_2^0}{\partial p_2^\beta} f_1^0\right), \tag{1.19}$$

где

$$w^{\alpha\beta} = \int d\mathbf{r}_2 \frac{\partial\Phi}{\partial r_1^\alpha}\frac{\partial\Psi}{\partial r_1^\beta} = \frac{u^2\delta_{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta}{u^3} 8\pi^2 \int_0^\infty k^3 |\Phi(k)|^2 dk \tag{1.20}$$

($\mathbf{u} = \mathbf{p}_1/m_1 - \mathbf{p}_2/m_2$). При кулоновском взаимодействии $\Phi(k) = \frac{e_1 e_2}{2\pi^2 k^2}$ и из (1.20) находим

$$w^{\alpha\beta} = 2\pi L e_1^2 e_2^2 \frac{u^2\delta_{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta}{u^3}, \tag{1.21}$$

где $L = \ln\frac{K_{\text{макс}}}{K_{\text{мин}}}$ — «кулоновский логарифм» ($K_{\text{макс}} \sim \bar{\varepsilon}/|e_1 e_2|$, где $\bar{\varepsilon}$ — средняя относительная энергия частицы, а $K_{\text{мин}} \sim 1/d$, где d — размер области экранирования кулоновского взаимодействия). Выражение (1.19) совпадает с полученным Л. Д. Ландау [6].

Для усреднения (1.19) по ϑ следует перейти к переменным $(X\vartheta)$. Этот переход упрощается, если рассматривать (1.19) в виде дивергенции некоторого шестимерного вектора в фазовом пространстве, полагая в переменных $y = (\mathbf{rp})$ отличными от нуля только его импульсные компоненты, а затем переходя к $(X\vartheta)$ по обычным правилам преобразования тензоров. В результате для усредненного уравнения находим

$$\frac{\partial f_1^0}{\partial t} + [\mathcal{H};\ f_1^0] = \frac{\partial}{\partial X_1^\alpha}\int dx_2 \left(A_{11}^{\alpha\beta}\frac{\partial f_1^0}{\partial X_1^\beta} f_2^0 - A_{12}^{\alpha\beta}\frac{\partial f_2^0}{\partial X_2^\beta} f_1^0\right), \tag{1.22}$$

где

$$A_{ik}^{\alpha\beta} = \left\langle\!\!\left\langle \frac{\partial X_i^\alpha}{\partial p_i^\gamma}\frac{\partial X_k^\beta}{\partial p_k^\sigma} w^{\gamma\sigma}(\mathbf{r}_1(x_1) - \mathbf{r}_2(x_2)) \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

§ 2

Здесь мы рассмотрим другой подход к задаче. Откажемся заранее от «полного» описания состояния частиц всеми каноническими переменными, а будем характеризовать частицы только медленными переменными X. Строго говоря, объект, характеризуемый переменными X, уже нельзя называть частицей. Это скорее частица, размазанная по орбите быстрого движения, так как величины X (интегралы быстрого движения) характеризуют орбиту в целом. Так, при движении в магнитном поле медленными переменными являются положение центра ларморовского кружка, его радиус и продольная скорость. Следовательно, в данном случае правильней говорить не о частицах, а о ларморовских кружках. Подобные объекты можно (хотя и не всегда столь наглядно) представлять и в других случаях. Ясно, что понятие «объекта» имеет смысл только в случае редких столкновений, когда частица за время между столкновениями успевает «размазаться» по орбите.

Движение «объектов» можно рассматривать как некоторый вероятностный процесс типа броуновского движения, но в отличие от последнего стохастичность в данном случае вносится не внешним воздействием, а является следствием внутренних процессов — столкновений. Пусть $W(tX_1X_2/t'X_1'X_2')$ — вероятность двум «объектам», находящимся при t' в точках X_1' и X_2', оказаться в момент t в X_1 и X_2 (вследствие взаимодействия друг с другом и с внешним полем). Тогда можно написать для функции распределения по переменным X

$$F(X_1t)=\int W(tX_1X_2/t'X_1'X_2')\,F(t'X_1')\,F(t'X_2')\,dX_1'dX_2'dX_2. \qquad (2.1)$$

(Здесь функции F предполагаем нормированными на единицу, зависимость от числа частиц учтем в конечном результате). Если ввести временно бинарную функцию

$$\mathcal{F}(tX_1X_2)=F(tX_1)\,F(tX_2), \qquad (2.2)$$

то для нее можно написать линейное уравнение

$$\mathcal{F}(tX)=\int W(tX/t'X')\,\mathcal{F}(t'X')\,dX'. \qquad (2.3)$$

(Здесь и в дальнейшем X означает совокупность X_1 и X_2). Удобно исходить из уравнения (2.3), а в конечном результате путем интегрирования по X_2 вернуться к функциям F.

Уравнение (2.3) в случае, когда состояния частиц меняются почти непрерывно (что имеет место при кулоновских

столкновениях), сводится известным образом [7] к дифференциальному уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X^\alpha}(\langle \Delta X^\alpha \rangle \mathscr{F}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^\alpha \partial X^\beta}(\langle \Delta X^\alpha \Delta X^\beta \rangle \mathscr{F}), \qquad (2.4)$$

где

$$\langle \Delta X^\alpha \rangle = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int (X^\alpha - X^{\alpha'}) W(tX/t - \tau X') \, dX',$$

$$\langle \Delta X^\alpha \Delta X^\beta \rangle = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int (X^\alpha - X^{\alpha'})(X^\beta - X^{\beta'}) W(tX/t - \tau X') \, dX'; \qquad (2.5)$$

$\langle \Delta X^\alpha \rangle$ представляет собой скорость усредненного изменения переменных X^α, а $\langle \Delta X^\alpha \Delta X^\beta \rangle$ определяют скорость разброса, необратимого рассеяния системы по соответствующим переменным, поэтому $\langle \Delta X^\alpha \Delta X^\beta \rangle$ естественно назвать тензором рассеяния. Эти величины могут быть найдены из рассмотрения единичного соударения.

Изменение канонических переменных x (полный набор, включая ϑ), описывающих систему из двух частиц, определяются уравнениями

$$\dot{x}^\alpha = [\mathscr{H}; x^\alpha]; \quad \mathscr{H} = \mathscr{H}_1^0(x_1) + \mathscr{H}_2^0(x_2) + \Phi(x_1 x_2), \qquad (2.6)$$

где $\mathscr{H}_k^0$ — гамильтониан одной частицы во внешнем поле. Решение (2.6) можно формально записать в виде

$$x^\alpha(tx) = S_t x^\alpha, \qquad (2.7)$$

где S_t — оператор, аналогичный введенному в (1.5), но соответствующий гамильтониану со взаимодействием. S_t можно представить в виде

$$S_t = \exp(t[\mathscr{H};]) = 1 + t[\mathscr{H};] + \frac{t^2}{2}[\mathscr{H}; [\mathscr{H};]] + \ldots \qquad (2.8)$$

Пусть S_t^0 соответствует движению невзаимодействующих частиц

$$\dot{x}^\alpha = [\mathscr{H}^0; x^\alpha]; \quad \mathscr{H}^0 = \mathscr{H}_1^0 + \mathscr{H}_2^0. \qquad (2.9)$$

Произведем разложение S_t по степеням взаимодействия Φ. Это разложение имеет вид *

$$S_t = \exp(t[\mathscr{H}^0;] + t[\Phi;]) = S_t^0 + S_t^{(1)} + S_t^{(2)} + \ldots, \qquad (2.10)$$

---

* Уравнения (2.11) получаются аналогично разложению в [8] для двухчастичного ядра $\hat{K}$ или общим методом «распутывания» некоммутирующих операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ из $\exp(\hat{A} + \hat{B})$, предложенным в [9].

где

$$S_t^{(1)} = \int_0^t dt' S^0_{t-t'} [\Phi;\ S^0_{t'}];\ \ S_t^{(2)} =$$

$$= \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' S^0{}_{-t'} [\Phi;\ S^0_{t'-t''} [\Phi;\ S^0_{t''}]]. \qquad (2.11)$$

Изменение переменных x^α за время t можно также представить в виде разложения по Ф

$$\Delta_t x^\alpha = S_t x^\alpha - x^\alpha = (S_t^0 - 1)\, x^\alpha + S_t^{(1)} x^\alpha + S_t^{(2)} x^\alpha + \ldots \equiv$$
$$\equiv (\Delta_t x^\alpha)^0 + (\Delta_t x^\alpha)^{(1)} + (\Delta_t x^\alpha)^{(2)} + \ldots \qquad (2.12)$$

Для вычисления величин $\langle \Delta x^\alpha \rangle$ нужно $\Delta_t x^\alpha$ разделить на t, считая t достаточно малым, после чего усреднить по ϑ.

Слова «достаточно малое t» требуют уточнения. $\langle \Delta x^\alpha \rangle$ и $\langle \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \rangle$ по их смыслу определяют скорость изменения соответствующих величин при усредненном медленном движении. Поэтому t должно быть малым по сравнению с характерным временем медленного движения, но одновременно большим по сравнению с временем быстрых процессов (в частности, по сравнению с временем столкновения t_0), чтобы за время t произошло усреднение по быстрым процессам. Из сказанного следует, что для произвольной функции $\chi(x^\alpha,\ t)$, плавно зависящей от времени, можно считать

$$\frac{1}{t} \int_0^t S^0_{t'} \langle \chi (x^\alpha,\ t') \rangle\, dt' \approx \langle \chi (x^\alpha,\ 0) \rangle, \qquad (2.13)$$

так как усредненная функция мало меняется за время t. С другой стороны, для потенциала взаимодействия Ф имеем

$$\int_0^t S_{t'} \Phi dt' \approx \int_0^\infty S^0_{t'} \Phi dt', \qquad (2.14)$$

так как потенциал взаимодействия (без усреднения) меняется быстро, за время порядка t_0.

При вычислении $\langle \Delta x^\alpha \rangle$ и $\langle \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \rangle$ из (2.12) и (2.11) можно использовать следующие свойства оператора S_t, непосредственно следующие из его определения:

$$1)\ S_{t+t'} = S_t \cdot S_{t'}; \qquad 2)\ S_t \varphi\chi = (S_t \varphi)\,(S_t \chi);$$
$$3)\ \frac{\partial}{\partial t} (S_t x^\alpha) = [\mathcal{H};\ S_t x^\alpha]; \quad 4)\ S_t [\chi;\ \varphi] = [S_t \chi;\ S_t \varphi]. \qquad (2.15)$$

С помощью (2.15) в результате несложных вычислений с использованием (2.13) и (2.14) получим для $\langle \Delta x^\alpha \rangle$

$$\langle \Delta x^\alpha \rangle^0 = \langle [\mathcal{H}^0;\ x^\alpha] \rangle;\ \langle \Delta x^\alpha \rangle^{(1)} = \langle [\Phi;\ x^\alpha] \rangle,$$

$$\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)} = \langle [\Psi;\ \ [\Phi;\ \ x^\alpha]] \rangle = \frac{1}{2} \langle [\Phi;\ [\Psi;\ x^\alpha]] + [\Psi;\ [\Phi;\ x^\alpha]] \rangle - \\ - \frac{1}{2} \langle [[\Phi;\ \Psi];\ x^\alpha] \rangle, \qquad (2.16)$$

где Ψ определено в (1.8). В тензоре рассеяния отличны от нуля только члены второго порядка по Φ

$$\langle \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \rangle = \langle [\Phi;\ x^\alpha]\,[\Psi;\ x^\beta] + [\Psi;\ x^\alpha]\,[\Phi;\ x^\beta] \rangle. \qquad (2.17)$$

Проиллюстрируем характер вычислений, приводящих к (2.16) и (2.17), на примере $\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)}$

$$\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)} \approx \frac{1}{t} \langle S_t^{(2)} x^\alpha \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle S^0_{t-t'} [\Phi;\ S^0_{t'-t''} [\Phi;\ S^0_{t''} x^\alpha]] \rangle.$$

После изменения порядка интегрирования и замены переменных $t'' \to t - t''$; $t' \to t' + t - t''$

$$\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)} = \frac{1}{t} \int_0^t dt'' \int_0^{t''} dt' \langle S^0_{t''-t'} [\Phi;\ S^0_{t'} [\Phi;\ S^0_{t-t''} x^\alpha]] \rangle.$$

Заменяя $S^0_{t''-t'} = S^0_{t''} \cdot S^0_{-t'}$ и пользуясь 4) из (2.15), получаем:

$$\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)} = \frac{1}{t} \int_0^t dt'' \left\langle S^0_{t''} \left[\int_0^{t''} S^0_{-t'} \Phi dt';\ [\Phi;\ S^0_{t-t''} x^\alpha] \right] \right\rangle.$$

Согласно (2.14) верхний предел внутреннего интеграла можно заменить бесконечностью, после чего, используя (2.13), получаем окончательно для $\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)}$ выражение (2.16). Аналогично вычисляются и остальные величины в (2.16) и (2.17).

Уравнения (2.16) и (2.17) определяют коэффициенты уравнения (2.4), если известен закон движения невзаимодействующих частиц и потенциал их взаимодействия.

Вычислим дивергенцию от тензора рассеяния. Из (2.17), используя формулу (1.6), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \langle \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \right\rangle = \langle [\Psi;\ [\Phi;\ x^\alpha]] + [\Phi;\ [\Psi;\ x^\alpha]] \rangle.$$

Сравнивая это выражение с (2.16), получаем следующее соотношение между $\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)}$ и тензором рассеяния:

$$\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \langle \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \rangle - \frac{1}{2} \langle [[\Phi;\ \Psi];\ x^\alpha] \rangle. \qquad (2.18)$$

(Заметим, что в формулах (2.16)—(2.18) под x можно понимать медленные переменные X, так как для фаз ϑ эти выражения тождественно обращаются в нуль.)

С помощью (2.16) и (2.18) можно исключить $\langle \Delta X^\alpha \rangle$ из уравнения (2.4), после чего оно примет вид

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t} + [\mathscr{H}^0 + \langle \Phi \rangle;\ \mathscr{F}] - \frac{1}{2}[\langle [\Phi;\ \Psi] \rangle;\ \mathscr{F}] = \\ = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X^\beta}\left(\langle \Delta X^\alpha \Delta X^\beta \rangle \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial X^\beta} \right). \qquad (2.19)$$

Интегрируя (2.19) по X_2 и переходя к одночастичным функциям F, получаем окончательно

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + [\mathscr{H}_1^0;\ F_1] + [\langle U(F) + U_c(F) \rangle;\ F_1] = \\ = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_1^\alpha}\int dX_2 \left(\langle \Delta X_1^\alpha \Delta X_1^\beta \rangle \frac{\partial F_1}{\partial X_1^\beta} F_2 + \langle \Delta X_1^\alpha \Delta X_2^\beta \rangle \frac{\partial F_2}{\partial X_2^\beta} F_1 \right), \qquad (2.20)$$

где $U(F)$ и $U_c(F)$ — самосогласованные поля, соответствующие обычному (Φ) и «коррелятивному» $\left(\Phi_c = -\frac{1}{2}[\Phi;\ \Psi]\right)$ потенциалам. В (2.20) можно перейти к обычной нормировке функций F на полное число частиц.

Уравнение (2.20) можно записать в виде уравнения непрерывности в пространстве «медленных» переменных X

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial j_{X^\alpha}}{\partial X^\alpha} = 0, \qquad (2.21)$$

где j_{X^α} — плотность потока в пространстве переменных имеет вид

$$j_{X^\alpha} = [\mathscr{H}^0;\ X_1^\alpha] F_1 + [\langle U + U_c \rangle;\ X_1^\alpha] F_1 - \\ - \frac{1}{2}\int dX_2 \left(\langle \Delta X_1^\alpha \Delta X_1^\beta \rangle \frac{\partial F_1}{\partial X_1^\beta} F_2 + \langle \Delta X_1^\alpha \Delta X_2^\beta \rangle \frac{\partial F_2}{\partial X_2^\beta} F_1 \right). \qquad (2.22)$$

Сравнивая (2.17) с (1.8), находим для входящих в уравнение (1.18) величин $\langle X^\alpha / X^\beta \rangle$

$$(2\pi)^{-s_2}\int d\vartheta_2 \langle X^\alpha / X^\beta \rangle_{\vartheta_1} = \langle X^\alpha / X^\beta \rangle_{\vartheta_1 \vartheta_2} = \langle \Delta X^\alpha \Delta X^\beta \rangle_{\vartheta_1 \vartheta_2}. \qquad (2.23)$$

С учетом (2.23) доказывается тождественность уравнений (2.20) и (1.18). При сравнении надо иметь в виду, что функция f^0 нормирована на полный канонический объем, а F — на объем медленных переменных, так что $F = (2\pi)^s f^0$, где s — число быстрых переменных ϑ.

Таким образом, рассмотренный здесь «вероятностный» метод оказывается эквивалентным первому приближению теории возмущений по $(\omega\tau)^{-1}$ для кинетического уравнения (см. § 1).

Следует отметить, что для обычного уравнения Фоккера—Планка (2.4) конкретное вычисление линейных отклонений $\langle\Delta X^\alpha\rangle$ оказывается значительно более сложным, чем вычисление тензора рассеяния $\langle\Delta X^\alpha\Delta X^\beta\rangle$, так как для этого необходимо использовать второе приближение для ΔX^α. С этой точки зрения уравнение (2.19) (и, следовательно, (2.20)) имеет существенное преимущество, так как не содержит $\langle\Delta X^\alpha\rangle^{(2)}$. Исключение $\langle\Delta X^\alpha\rangle^{(2)}$ оказалось возможным благодаря соотношению (2.18) между линейными и квадратичными отклонениями. Л. Д. Ландау [6] получил уравнение типа (2.20) (в пространстве обычных импульсов) в качестве кинетического уравнения для заряженных частиц, используя принцип детального равновесия. Последний безусловно имеет место в случае столкновений свободных частиц (т. е. когда можно пренебречь влиянием внешних полей на процесс соударения). Если же внешние поля существенны при столкновениях, то принцип детального равновесия в общем случае не имеет места. При справедливости указанного принципа уравнение Фоккера—Планка (2.4), как фактически показано в [6], может быть приведено к виду

$$\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X^\alpha}\left(\langle\Delta X^\alpha\Delta X^\beta\rangle\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial X^\beta}\right). \tag{2.24}$$

Из сравнения (2.24) и (2.4) следует, что коэффициенты последнего связаны соотношением

$$\langle\Delta X^\alpha\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X^\beta}\langle\Delta X^\alpha\Delta X^\beta\rangle, \tag{2.25}$$

что отличается от общего соотношения (2.18) отсутствием члена с «коррелятивным» потенциалом Φ_c. Таким образом, если член с «коррелятивным» потенциалом не обращается в нуль, то это указывает на несправедливость в этом случае принципа детального равновесия. Существенно, что член с Φ_c имеет вид самосогласованного поля, поэтому он приводит только к упорядоченным, обратимым процессам. Другими словами, отсутствие принципа детального равновесия не сказывается на необратимых процессах рассеяния (диффузии, термодиффузии и т. п.).

До сих пор все вычисления проводились в канонических переменных, в число которых входили переменные действия I^α. Переход к другим переменным не представляет

труда, так как уравнение (2.20) имеет тензорный характер. Пусть $y=(\Upsilon\,\xi)$ — новый полный набор переменных (не обязательно канонических) и пусть связь новых и старых переменных имеет вид

$$Y=Y(X), \qquad X=X(Y),$$
$$\xi=\xi(X\vartheta), \qquad \vartheta=\vartheta(Y\xi) \tag{2.26}$$

Как видно из (2.26), Y являются теперь медленными переменными, а ξ — быстрыми. В переменных Y уравнение (2.20) принимает вид

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}+[\mathcal{H}_1^0;\,F_1]+[\langle U+U_c\rangle;\,F_1]=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{G_1}}\frac{\partial}{\partial Y_1^\alpha}\sqrt{G_1}\int\sqrt{G_2}\,dY_2\Big(\langle\Delta Y_1^\alpha\Delta Y_1^\beta\rangle\frac{\partial F_1}{\partial Y_1^\beta}F_2+$$
$$+\langle\Delta Y_1^\alpha\Delta Y_2^\beta\rangle\frac{\partial F_2}{\partial Y_2^\beta}F_1\Big), \tag{2.27}$$

где $\sqrt{G}=\frac{\partial(X)}{\partial(Y)}$ — якобиан перехода от переменных X (играющих роль декартовых координат) к Y,

$$\langle\Delta Y_i^\alpha\Delta Y_k^\beta\rangle=\langle[\Phi;\;Y_i^\alpha][\Psi;\;Y_k^\beta]+[\Psi;\;Y_i^\alpha][\Phi;\;Y_k^\beta]\rangle, \tag{2.28}$$

а усреднение понимается в смысле

$$\langle\varphi\rangle\equiv\langle\varphi\rangle_{\vartheta_1\vartheta_2}=(2\pi)^{-s_1-s_2}\int\frac{\partial(\vartheta_1)}{\partial(\xi_1)}\cdot\frac{\partial(\vartheta_2)}{\partial(\xi_2)}\,\varphi\,d\xi_1 d\xi_2. \tag{2.28}$$

Заметим, что F в (2.27) нормирована условием

$$\int F\sqrt{G}\,dY=N.$$

§ 3

Рассмотрим простой пример: расширение проходящего через газ электронного пучка в продольном магнитном поле. Будем считать пучок достаточно разреженным и пренебрегать взаимодействием электронов между собой. Кулоновское взаимодействие электронов с атомами экранируется на атомных размерах (много меньших ларморовского радиуса), поэтому столкновения являются быстрыми ($\omega t_0\ll 1$) и можно пользоваться уравнением (1.22). Отдачей атомов при столкновениях пренебрегаем, опуская член с производной от F_2.

Для атомов выбираем декартовы переменные ($\mathbf{r}_2$; $\mathbf{p}_2$), а электроны пучка будем описывать координатами центра

ларморовского кружка ($x^0y^0z^0$), его радиусом ρ и продольной скоростью $v^{\parallel}$ — в качестве медленных переменных. Быстрой переменной (ϑ) является фаза движения частицы по ларморовской окружности. Эти переменные (не канонические) связаны с декартовыми соотношениями

$$x = x^0 + \rho\cos\vartheta;\quad y = y^0 + \rho\sin\vartheta;\quad z = z^0;$$

$$p^x = \frac{1}{2}\,m\omega\,(y^0 - \rho\sin\vartheta);\quad p^y = -\frac{1}{2}\,m\omega\,(x^0 - \rho\cos\vartheta);$$

$$p^z = mv^{\parallel}\quad\left(\omega = -\frac{eH}{mc}\right). \tag{3.1}$$

С учетом всех замечаний, сделанных выше, уравнение (1.22) в нашем случае принимает вид

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + v^{\parallel}\frac{\partial F_1}{\partial z^0} = \frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial}{\partial Y_1^{\alpha}}\left\{\sqrt{G_1}\,\langle Q^{\alpha\beta}\rangle\,\frac{\partial F_1}{\partial Y_1^{\beta}}\right\}, \tag{3.2}$$

где

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{\partial Y_1^{\alpha}}{\partial p_1^{\gamma}}\,\frac{\partial Y_1^{\beta}}{\partial p_1^{\sigma}}\int w^{\gamma\sigma}F_2\,d\mathbf{p}_2. \tag{3.3}$$

Из (1.21) легко видеть, что в пренебрежении величинами $v^{\perp}/v^{\parallel}$ и $v_2/v^{\parallel}$ отличны от нуля только две компоненты $w^{\gamma\sigma}$

$$w^{x^0x^0} = w^{y^0y^0} = 2\pi e^2\epsilon_2^2 Ln_2\cdot 1/v^{\parallel}. \tag{3.4}$$

Из (3.3) с учетом (3.1) и (3.4) получаем

$$\langle Q^{x^0x^0}\rangle = \langle Q^{y^0y^0}\rangle = \langle Q^{\rho\rho}\rangle = 2\pi e^2e_2^2Ln_2\cdot\frac{1}{m^2\omega^2v^{\parallel}}, \tag{3.5}$$

а остальные компоненты $\langle Q^{\alpha\beta}\rangle$ равны нулю. Из (3.1) легко находим также, что $\sqrt{G_1} = m^3w^2\rho$, после чего (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v^{\parallel}\frac{\partial F}{\partial z^0} = \frac{2\pi e^2e_2^2Ln_2}{m^2\omega^2v^{\parallel}}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial x^{0^2}} + \frac{\partial^2F}{\partial y^{0^2}} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)\right\}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим следующую стационарную задачу: бесконечно тонкий цилиндрический пучок с осью вдоль z, монохроматический по скоростям, при $z = 0$ входит в область газа. Найдем распределение электронов при $z > 0$.

Вводя величину $r^0 = \sqrt{x^{0^2} + y^{0^2}}$ — расстояние ларморовского центра от оси пучка, получим из (3.6)

$$\frac{m^2\omega^2v^{\parallel 2}}{2\pi e^2e_2^2Ln_2}\,\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{r^0}\,\frac{\partial}{\partial r^0}\left(r^0\,\frac{\partial F}{\partial r^0}\right) + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial F}{\partial\rho}\right). \tag{3.7}$$

Граничное условие при $z=0$ имеет вид

$$F_0=\frac{2\nu}{\pi m^3\omega^2}\,\delta(v^{\parallel}-v_0)\,\frac{\delta(\rho)}{\rho}\,\frac{\delta(r^0)}{r^0}, \qquad (3.8)$$

где ν — число электронов на единицу длины пучка (F нормируем условием $\int F\sqrt{G}\,2\pi r^0 dr^0 d\rho dv^{\parallel}=\nu$). Решение (3.7) с граничным условием (3.8) имеет вид

$$F=\frac{\nu\delta(v^{\parallel}-v_0)}{2\pi m^3\omega^2(2\alpha z)^2}\exp\left(-\frac{\rho^2+r^{0^2}}{4\alpha z}\right);\quad \alpha=\frac{2\pi Le^2e_2^2n_2}{m^2\omega^2v_0^2}. \qquad (3.9)$$

Как следует из (3.9), расплывание пучка является диффузионным процессом как в координатном пространстве, так и в пространстве ρ с одинаковым коэффициентом диффузии

$$D_{\perp}=\alpha v_0=\frac{2\pi Le^2e_2^2n_2}{m^2\omega^2v_0}. \qquad (3.10)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Будкер, С. Т. Беляев, см. т. II настоящего издания, стр. 330.
2. С. Т. Беляев, Г. И. Будкер, см. настоящий том, стр. 41.
3. S. Chapman, T. G. Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge, 1939.
4. Н. Н Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, М., Гостехиздат, 1946.
5. Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, Изд. АН УССР, 1945.
6. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, **7**, 203 (1937).
7. М. А. Леонтович, Статистическая физика, М., Гостехиздат, 1944.
8. R. P. Feynman, Phys. Rev., **76**, 749 (1949).
9. R. P. Feynman, Phys. Rev. **84**, 108 (1951).