*Г. И. Будкер, С. Т. Беляев*

# КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА ПРИ РЕДКИХ СТОЛКНОВЕНИЯХ*

Предлагается метод упрощения кинетического уравнения при редких столкновениях. Найдено соответствующее уравнение для релятивистского электронного газа, которое используется для исследования стационарного состояния стабилизированного электронного пучка.

## § 1. Введение

Кинетическое уравнение для частиц во внешнем поле с учетом столкновений представляет собой интегродифференциальное уравнение семи переменных (трех импульсов, трех координат и времени), которое имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H;\ f] = st\,(f), \qquad (1.1)$$

где [;] означают скобки Пуассона, а $st\,(f)$ — столкновительный член. Левая часть (1.1) описывает движение частиц во внешних полях, правая — влияние столкновений. Если $\tau$ — время свободного пробега, а $\omega$ — собственные частоты частиц во внешнем поле, то в случаях $\omega\tau \ll 1$ и $\omega\tau \gg 1$ следует ожидать существенных упрощений (1.1). Действительно, при $\omega\tau \ll 1$, т. е. при частых столкновениях, существует гидродинамическое (диффузионное) приближение. Смысл этого приближения состоит в том, что, вследствие большой величины столкновительного члена, в каждой точке пространства быстро устанавливается максвелловское распределение по

* Работа выполнена в 1954 г.

скоростям. Уравнение (1.1) в этом случае сводится к системе уравнений гидродинамики, теплопроводности и диффузии, которые являются уравнениями одних пространственных координат и времени [1].

Второй предельный случай ($\omega\tau \gg 1$) до сих пор не привлекал к себе достаточно внимания и практически не разработан. Между тем в этом случае можно разработать единый метод упрощения уравнения (1.1) и сведения к уравнению для одной функции трех переменных (и времени). Для этого необходимо от обычных координат и импульсов перейти к переменным действиям $I_\alpha$ и угловым переменным $\vartheta_\alpha$ невозмущенного столкновениями движения. Тогда распределение можно искать как функцию только $I_\alpha$, ибо при наличии зависимости частоты от $I_\alpha$ за достаточно большое время (без столкновений) устанавливается равномерное распределение частиц по угловым переменным («размешивание»). Подставляя $f(I_\alpha, t)$ в (1.1), получим

$$\frac{\partial f(I_\alpha, t)}{\partial t} = st\,[f(I_\alpha, t);\ I_\alpha;\ \vartheta_\alpha] \qquad (1.2)$$

($I_\alpha$ являются интегралами движения, поэтому $[H;\ f(I_\alpha)] = 0$). Усредняя (1.2) по $\vartheta_\alpha$, получим окончательное уравнение

$$\frac{\partial f(I_\alpha, t)}{\partial t} = \overline{st}\,[f(I_\alpha);\ I_\alpha], \qquad (1.3)$$

представляющее собой искомое уравнение трех переменных при редких столкновениях ($\omega\tau \gg 1$). Уравнение (1.3) справедливо не только в постоянных полях, но и в полях, медленно зависящих от времени, ибо переменные действия $I_\alpha$ являются адиабатическими инвариантами.

Кроме намеченного выше метода получения упрощенного уравнения в случае $\omega\tau \gg 1$ возможен еще другой, эквивалентный, подход к задаче, а именно: составление кинетического уравнения в пространстве интегралов движения. Для этого вводится функция интегралов движения Ф, представляющая собой полное число частиц, имеющих заданные значения интегралов движения. При редких столкновениях оказывается возможным ввести понятие вероятности изменения интегралов движения вследствие столкновений как функцию этих интегралов. Тогда для Ф можно составить кинетическое уравнение, хотя число переменных у Ф меньше, чем у канонической функции $f$ (при частых столкновениях этого сделать нельзя). Если существенны малые изменения импульсов при каждом столкновении, то уравнение принимает фоккер-планковский вид. В случае, когда возмущения могут быть опи-

саны дополнительным гамильтонианом, средние значения отклонений удается выразить через средние квадратичные, и уравнение принимает симметричный вид типа уравнения Л. Ландау [2].

Ниже рассматривается конкретная задача о поведении электронного газа в определенных полях. Такая задача возникает при исследовании поведения электронного стабилизированного пучка (СЭП) [3] в электронной системе координат. В этой системе плотность ионов много больше плотности электронов, так что можно пренебречь электрон-электронными столкновениями по сравнению с ион-электронными. При этом движение ионов можно считать прямолинейным. Несмотря на то, что решается конкретная задача, метод решения носит общий характер.

## § 2. Упрощенное кинетическое уравнение для электронов в электрическом и магнитном поле стабилизированного электронного пучка

В работе [4] нами было получено кинетическое уравнение для релятивистского электронного газа, которое было записано в двух видах: в релятивистски инвариантном виде для функции восьми переменных и в неинвариантной форме для обычной функции распределения. Намеченную во введении программу упрощения уравнения можно провести как в той, так и в другой форме. Ограничимся упрощением неинвариантного уравнения, которое имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H;\ f] = -\frac{\partial j_\alpha}{\partial p_\alpha};\quad j_\alpha = 2\pi e^2 e'^2 L \int d^3p'\, \frac{w^{\alpha\beta}}{\gamma\gamma'}\left\{f\frac{\partial f'}{\partial p'_\beta} - f'\frac{\partial f}{\partial p_\beta}\right\}, \tag{2.1}$$

где

$$w^{\alpha\beta} = \frac{\gamma^2\gamma'^2(1-\beta_\sigma\beta'_\sigma)^2}{c\left[\gamma^2\gamma'^2(1-\beta_\sigma\beta'_\sigma)^2-1\right]^{3/2}}\left\{\left[\gamma^2\gamma'^2(1-\beta_\sigma\beta'_\sigma)^2-1\right]\delta_{\alpha\beta} - \gamma^2\beta_\alpha\beta_\beta - \right.$$
$$\left. - \gamma'^2\beta'_\alpha\beta'_\beta + \gamma^2\gamma'^2(1-\beta_\sigma\beta'_\sigma)(\beta_\alpha\beta'_\beta + \beta'_\alpha\beta_\beta)\right. \tag{2.2}$$

Для интересующей нас задачи электронного стабилизированного пучка подставляем функцию распределения ионов в виде

$$f_2(p_2^\alpha) = n_2\delta(p_2^x)\,\delta(p_2^y)\,\delta(p_2^z - \beta_2\gamma_2 m_2),$$

где $n_2$ — плотность ионов в электронной системе координат. Пренебрегая электрон-электронными столкновениями и отбрасывая члены порядка $m/m_2$, получим из (2.1)

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + [H; f_1] = 2\pi e_1^2 e_2^2 L n_2 \frac{\partial}{\partial p_{1\alpha}} \left[ \frac{\tilde{w}^{\alpha\beta}}{\gamma_1 \gamma_2} \frac{\partial f_1}{\partial p_{1\beta}} \right], \tag{2.3}$$

где

$$\tilde{w}^{\alpha\beta} = \frac{1}{n_2} \int f_2 w^{\alpha\beta} d^3 p_2. \tag{2.4}$$

В слабо заряженном пучке можно считать $n_2$ не зависящей от радиуса $r$ в области, занятой электронами. Учитывая, что скорость ионов в электронной системе близка к скорости света ($\gamma_2 \gg 1$), а также то, что в этой системе $n_2 \gg n_1$ (см. [3]), получим с точностью до $\gamma_2 - 2$ для потенциалов электрического и магнитного поля внутри пучка

$$e\varphi(r) = eA_z(r) = \frac{1}{2} k^2 r^2; \quad A_\varphi = A_r = 0;$$

$$(k^2 = 2\pi |e_1 e_2| n_2). \tag{2.5}$$

При данных полях осуществляется один из немногих случаев, когда уравнения движения релятивистской частицы могут быть явно решены в элементарных функциях.

Используя это, мы сможем в явном виде выразить переменные действия, провести всю намеченную во введении программу до конца и получить уравнение для электронного газа в стабилизированном электронном пучке.

Введем в пространстве импульсов ортогональную систему координат $(p_1; p_2; p_3)$ так, чтобы в данной точке

$$p_1 = p_z; \quad p_2 = \frac{p_\varphi}{r}; \quad p_3 = p_z, \tag{2.6}$$

где $p_r$, $p_\varphi$ и $p_z$ — обобщенные импульсы, сопряженные $r$, $\varphi$, $z$. Тензор $\tilde{w}^{\alpha\beta}$ имеет в этой системе координат следующий вид:

$$\tilde{w}^{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} v^2; & 0; & \sqrt{2w - v^2 k^2 r^2 - \frac{u^2}{r^2}} \\ 0 & v^2 & \frac{u}{r} \\ \sqrt{2w - v^2 k^2 r^2 - \frac{u^2}{r^2}}; & \frac{u}{r}; & \frac{2w}{v^2} - k^2 r^2, \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

где введены интегралы движения

$$w = \frac{\varepsilon^2 - p_z^2 - 1}{2}; \qquad (2.8)$$

$u = p_\varphi$;
$v = \varepsilon - p_z$;

$\varepsilon = \sqrt{p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + \left(p_z - \frac{k^2 r^2}{2}\right)^2 + 1} + \frac{k^2 r^2}{2}$ — полная энергия частиц.

Переменными действиями в поле с аксиальной симметрией являются

$$I_1 = \frac{1}{2}\oint p_r dr =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{(\varepsilon - e\varphi)^2 - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - \left(p_z - \frac{e}{c}A_z\right)^2 - 1}\, dr; \qquad (2.9)$$

$I_2 = p_\varphi$;
$I_3 = p_z$.

При выбранных потенциалах (2.5) выражение для $I_1$ легко интегрируется

$$I_1 = \frac{\varepsilon^2 - p_z^2 - 1}{2k\sqrt{\varepsilon - p_z}} - p_\varphi = \frac{w}{kv} - u. \qquad (2.10)$$

Канонически сопряженные переменным действия координаты $\vartheta_\alpha$ находятся дифференцированием по $I_\alpha$ производящей функции

$$S = \int \sqrt{\left[\varepsilon(I_\alpha) - \frac{k^2 r^2}{2}\right]^2 - \frac{I_2^2}{r^2} - \left(I_3 - \frac{k^2 r^2}{2}\right)^2 - 1}\, dr + I_2\varphi + I_3 z, \qquad (2.11)$$

где $\varepsilon(I_\alpha)$ — энергия, выраженная как функция переменных действий с помощью (2.9) и (2.10).

Нетрудно увидеть, что $r$ выражается только через одну координату $\vartheta_1$ (и переменные действия). Следовательно, потенциалы, зависящие только от $r$, в новых переменных не будут зависеть от $\vartheta_2$ и $\vartheta_3$. Переменные $\vartheta_2$ и $\vartheta_3$ имеют наглядный смысл. Так, например, можно показать, что величина $\Delta z$, равная изменению величины $z$ за период радиальных колебаний $T$, равна соответствующему изменению $\vartheta_3$, а $\dot{\vartheta}_3$ представляет собой усредненную за период скорость по оси $z$.

Как легко показать

$$T = \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon} = \frac{1 + w + v^4}{2kv^3}; \quad \Delta z = \Delta \vartheta_3 = \frac{1 + w - v^4}{2kv^3}; \qquad (2.12)$$

$$\vartheta_3 = v_z = \frac{\Delta z}{T} = \frac{1 + w - v^4}{1 + w + v^4}. \qquad (2.13)$$

Для того чтобы в уравнении (2.4) перейти к новым координатам, будем формально рассматривать его правую часть как шестимерную дивергенцию в фазовом пространстве трех импульсов и трех координат. При этом в исходной системе координат следует положить равными нулю все компоненты тензора $\tilde{w}^{\alpha\beta}$, у которых хотя бы один из индексов координатный *.

Если рассматривать $\tilde{w}^{\alpha\beta}$ как шестимерный контровариантный тензор, то выражение для потока в произвольных координатах имеет вид

$$j^\mu = -2\pi e_1^2 e_2^2 L n' \frac{\tilde{w}^{\mu\nu}}{\gamma_1 \gamma_2} \frac{\partial f}{\partial \nu} \qquad (2.14)$$

$$(\mu, \nu = 1, 2 \ldots 6).$$

Тогда

$$\operatorname{div} j = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial p_\mu} (\sqrt{g} j^\mu), \qquad (2.15)$$

где $g$ — детерминант метрического тензора.

Если новые переменные канонически сопряженные, то $g = 1$. Поскольку левая часть уравнения (2.1) сохраняет свой вид при канонических преобразованиях координат, кинетическое уравнение в любых канонически сопряженных переменных имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vartheta_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} f\right) - \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial \vartheta_\alpha} f\right) = -\left(\frac{\partial j^{v}_{\alpha}}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial y^{v}_{\alpha}}{\partial \vartheta_\alpha}\right) \qquad (2.16)$$

$$(\alpha = 1, 2, 3).$$

Выберем в качестве новых координат переменные действия и угловые переменные $\vartheta_\alpha$. Тогда $\frac{\partial H}{\partial \vartheta_\alpha} = 0$, так как переменные действия являются интегралами движения.

---

* Этот прием по существу не является формальным. Правая часть уравнения (2.4), вообще говоря, должна представлять собой шестимерную дивергенцию. Равенство нулю пространственных компонент потока связано с тем, что столкновение рассматривается в одной точке физического пространства, и частицы при столкновении практически не успевают сместиться.

Чтобы получить окончательное уравнение в нашем приближении, проинтегрируем (2.16) по угловым переменным от 0 до $2\pi$, т. е. по периодам этих переменных. Интегралы от производных по $\vartheta_\alpha$ равны нулю из условия периодичности. Так как пределы интегрирования не зависят от импульсов, а функция $f$ — от координат, то (2.16) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\pi e_1^2 e_2^2 L n_2 \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(R^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial p^\beta}\right) \quad (\alpha,\beta = 1,\ 2,\ 3), \tag{2.17}$$

где введено обозначение

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\gamma_2}\int_0^{2\pi} d^3\vartheta\,\frac{\tilde{w}^{\alpha\beta}}{\gamma_1}. \tag{2.18}$$

Строго говоря, этот результат справедлив, если движение по всем первоначальным координатам финитно и для всех трех частот справедливо соотношение $\omega_\alpha\tau \gg 1$. Если изменение по какой-либо координате инфинитно, то по соответствующей частоте условие $\omega\tau \gg 1$ заведомо не выполняется. В нашем случае надо интегрировать (2.16) только по тем $\vartheta_\alpha$, которые соответствуют финитным координатам, т. е. по $\vartheta_1$ и $\vartheta_2$. При этом и в правой, и в левой части (2.17) останутся производные по $\vartheta_3$, а в остальном уравнение не изменится, так как потенциалы, а следовательно, и $\tilde{w}^{\alpha\beta}$ зависят только от $\vartheta_1$; $\frac{\partial f}{\partial \vartheta_3}$ мало по сравнению с $\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$ $\left(\text{как } \frac{1}{\omega\tau}\right)$, поэтому в правой части производной по $\vartheta_3$ можно пренебречь, и (2.17) примет вид *

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{z}\frac{\partial f}{\partial z} = 2\pi n_2 e_1^2 e_2^2 L \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(R^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial p_\beta}\right). \tag{2.19}$$

Как видно из (2.17) и (2.18), в уравнение входят только чисто импульсные компоненты шестимерного тензора $\tilde{w}^{\alpha\beta}$. С другой стороны, в исходной системе координат только чисто импульсные компоненты этого тензора отличны от нуля. Таким образом, при вычислении тензора $\tilde{w}^{\alpha\beta}$ в координатах $I_\alpha$, $\vartheta_\alpha$ из 36 коэффициентов преобразования достаточно знать только девять, а именно $\frac{\partial I_\alpha}{\partial p_\beta}$, которые легко получить из (2.9) и (2.10).

---

* Всегда рассматриваются малые градиенты по оси $z$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{f} \ll 1.$$

Компоненты тензора $\tilde{w}^{\alpha\beta}$ в новой системе координат находятся, согласно закону преобразования контравариантных тензоров

$$\tilde{w}^{\alpha\beta'} = \frac{\partial I_\alpha}{\partial p_\gamma} \frac{\partial I_{\beta'}}{\partial p_\sigma} \tilde{w}^{\gamma\sigma}$$

с учетом (2.8) и (2.9).

Тензор $\tilde{w}^{\alpha\beta'}$ зависит только от $r$. С другой стороны, как уже указывалось, $r$ выражается только через одну угловую переменную $\vartheta_1$. Таким образом, в (2.18) фактически остается интегрирование только по $\vartheta_1$. Можно перейти к интегрированию только по $r$. Из (2.11) и (2.12) следует

$$d\vartheta_1 = \frac{1}{T} \frac{\varepsilon - \frac{k^2 r^2}{2}}{\sqrt{2w - v^2 k^2 r^2 - \frac{u^2}{r^2}}} dr. \qquad (2.20)$$

В результате после не сложных, но громоздких вычислений, получаем

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{kvT} \begin{Bmatrix} \frac{2}{k^2}(w - kvu); & -\frac{1}{k^2}(w - kvu); & \frac{1}{kv}(w - kvu); \\ -\frac{1}{k^2}(w - kvu); & \frac{w}{k^2}; & u; \\ \frac{1}{kv}(w - kvu); & u; & \frac{w}{v^2}. \end{Bmatrix} \qquad (2.21)$$

Тензор $R^{\alpha\beta}$ выражается через переменные $w$, $u$ и $v$. Поэтому естественно записать кинетическое уравнение (2.17) в этих переменных.

Для перехода к другим переменным правую часть уравнения (2.17) удобно рассматривать как тензорное выражение в трехмерном пространстве $p_\alpha$. Тогда в новых переменных это уравнение примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{z} \frac{\partial f}{\partial z} = 2\pi e_1^2 e_2^2 L n_2 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha'}} \left( R^{\alpha\beta'} \frac{\partial f}{\partial p_{\beta'}} \right), \qquad (2.22)$$

где $\sqrt{g}$ — якобиан перехода от переменных действия к новым переменным, а $R^{\alpha\beta'}$ получается из $R^{\alpha\beta}$ по правилам преобразования трехмерных контравариантных тензоров.

В интересующем нас случае матрица преобразования от переменных $I_\beta(I_1; I_2; I_3)$ к переменным $p'_\alpha(w; u; v)$ легко

находится с помощью (2.8)—(2.10). Якобиан преобразования равен

$$\sqrt{g} = \frac{2T}{v}. \tag{2.23}$$

Тензор $R^{\alpha\beta'}$ в новых переменных имеет вид

$$R^{\alpha\beta'} = \frac{1}{kvT} \begin{Bmatrix} wv^2 & 0 & uv^2; \\ 0 & 0 & 0; \\ uv^2 & 0 & \frac{w}{k^2}. \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$

Из (2.22) видно, что усредненное кинетическое уравнение (в произвольных переменных интегралах движения) для канонической функции распределения $f$, вообще говоря, не имеет вид уравнения непрерывности, однако для функции $\Phi = (2\pi)^3 \sqrt{g} f$ получается уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial j^{\alpha}}{\partial p_{\alpha'}}, \tag{2.25}$$

где

$$j^{\alpha} = 2\pi e_1^2 e_2^2 L n_2 \sqrt{g} R^{\alpha\beta'} \frac{\partial}{\partial p_{\beta'}} \left( \frac{\Phi}{\sqrt{g}} \right). \tag{2.26}$$

Результат вполне понятен, так как функция $\Phi$ представляет собой интеграл от функции $f$ по координатам, канонически сопряженным импульсам $p_{\alpha'}$. Только в случае переменных действия функции $\Phi$ и $f$ совпадают (с точностью до постоянной), ибо пределы изменения $\vartheta_{\alpha}$ не зависят от переменных действия.

В раскрытом виде уравнения (2.23) для функции $\Phi(w; u; v) = (2\pi)^2 \frac{2T}{v} f$ принимает вид

$$\frac{1}{2\pi e_1^2 e_2^2 L n_2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{z} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left( \frac{wv}{kT} \Phi \right) +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2}{\partial w \partial u} \left( \frac{uv}{kT} \Phi \right) + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left( \frac{w}{k^3 v T} \Phi \right) - 2 \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{v}{kT} \Phi \right). \tag{2.27}$$

## § 3. Кинетическое уравнение в пространстве интегралов движения

Функция $\Phi$, введенная в предыдущем параграфе, имеет определенный физический смысл, а именно: $\Phi du dv dw$ есть число частиц во всем пространстве, имеющих значение инте-

гралов движения $w$, $u$, $v$ в пределах $w$; $w+\Delta w$; $u$; $u+\Delta u$; $v$; $v+\Delta v$. Вообще говоря, кинетическое уравнение можно составить только для функции такого числа переменных, которое достаточно для полного описания системы, так чтобы вероятность значений этих координат в последующие моменты времени определялась их начальными значениями. Три интеграла движения не представляют в общем случае полного набора координат, однако при редких столкновениях можно перейти от рассмотрения частиц к рассмотрению некоторых новых объектов, описываемых только тремя интегралами движения. Каждый такой объект соответствует как бы усредненной по орбите частице, так что число объектов в элементе объема трех интегралов движения равно числу частиц во всем пространстве с интегралами движения, лежащими в этом же элементе.

Для этих объектов можно найти вероятность изменения «координат» как функцию самих «координат». Кроме того, из физического смысла введенных объектов следует, что для них должен выполняться закон сохранения. Этого достаточно для составления кинетического уравнения. Если при столкновениях существенны только отклонения на малые углы, т. е. интегралы движения при столкновении меняются на малые величины, то кинетическое уравнение принимает вид уравнения непрерывности типа Фоккера—Планка

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial J_k}{\partial p_k}, \tag{3.1}$$

где

$$J_k = \Phi\overline{\Delta p_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_e}(\overline{\Delta p_k \Delta p_e \Phi}), \tag{3.2}$$

а

$$\overline{\Delta p_i} = \int d^3p' W(pp')(p'_i - p_i);$$

$$\Delta p_i \Delta p_k = \int d^3p' W(pp')(p'_i - p^i)(p'_k - p_k). \tag{3.3}$$

Здесь $p_i$ — интегралы движения («координаты»); $W(pp')$ — вероятность перехода как функция импульсов. Наличие вероятности $W$, как указывалось является необходимым условием возможности составления уравнения для функции Ф. В общем случае, когда учитываются столкновения частиц друг с другом, вероятность $W$ сама интегрально зависит от функции Ф, так что уравнение (3.1) является нелинейным интегродифференциальным уравнением.

В случае, когда учитываются только столкновения частиц с внешними частицами, распределение которых считается

известным, или рассеяние на флюктуирующих внешних полях, уравнение (3. 1) становится линейным дифференциальным уравнением.

Так как столкновения могут происходить с разными внешними частицами (или полями), которые будем характеризовать параметрами $\alpha_\mu$, то имеет смысл ввести величину $W(p,\ p',\ \alpha_\mu)$, представляющую вероятность столкновения частиц с импульсом $p$ с внешней частицей, имеющей заданные значения параметров $\alpha_\mu$, с изменением импульса на $p'$. Если рассеяние происходит на частицах, то в качестве параметров $\alpha_\mu$ можно взять начальные импульсы и координаты частиц. Вероятность $W$ тогда записывается в виде

$$W(pp') = \int n(\alpha_\mu)\, W(p,\ p',\ \alpha_\mu)\, d\alpha,$$

где $n(\alpha_\mu)$ — полное число внешних частиц с параметрами $\alpha_\mu$. Вероятность $W$ обычно известна не как функция начальных и конечных импульсов $p$ и $p'$ (или, что то же самое, $p$ и $\Delta p = p' - p$), а как функция начальных импульсов и некоторых параметров $a_i$, характеризующих невозмущенное движение (например, начальных значений координат, либо параметров удара). Естественно, поэтому в (3. 3) перейти от переменных интегрирования $p'$ к переменным $a_i$. Якобиан перехода будем включать в вероятность $W(p,\ \alpha_\mu,\ a_i)$ (в дальнейшем будем обозначать вероятность, нормированную на новые переменные, той же буквой $W$). Величины $\Delta p_i$ становятся при этом функциями новых переменных (и параметров $a_\mu$) и определяются из уравнений движения.

Функция Гамильтона для рассматриваемых частиц в переменных $p_i$ (интегралах движения) и канонически сопряженных им координатах $\vartheta_i$ можно представить в виде

$$H = H_0(p_i) + H_1(p_i;\ \vartheta_i;\ t) + H_2(p_i;\ \vartheta_i;\ t),$$

где $H_0(p_i)$ — гамильтониан невозмущенного движения во внешнем поле, $H_1$ и $H_2$ — добавки, соответственного, первого и второго порядка, связанные со столкновениями. Эти добавки, кроме указанных аргументов, зависят также от параметров $\alpha_\mu$. В нулевом приближении

$$\dot p_i^0 = -\frac{\partial H_0}{\partial \vartheta_i} = 0, \quad \dot\vartheta_i^0 = \frac{\partial H_0}{\partial p_i},$$

или $\vartheta_i^0 = a_i + \omega_i t$, где $\omega_i(p^0) = \dfrac{\partial H}{\partial p_i^0}$, $a_i$ — начальные значения обобщенных координат, которые можно выбирать за новые

переменные интегрирования при вычислении $\Delta p_i$ и $\overline{\Delta p_i \Delta p_k}$. В первом приближении

$$\dot{p}_i^{(1)} = -\frac{\partial H_1(p^0;\ \vartheta^0;\ t)}{\partial \vartheta_i^0}; \qquad \dot{\vartheta}_i^{(1)} = \frac{\partial H_1(p^0;\ \vartheta^0;\ t)}{\partial p_i^0} + \\ + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i^0 \partial p_k^0} p_k^{(1)},$$

откуда

$$\Delta p_i^{(1)} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{\partial H_1(p^0;\ \vartheta^0;\ t)}{\partial \vartheta_i^0}. \tag{3.4}$$

Этого приближения для $p_i$ достаточно только для вычисления выражений $\overline{\Delta p_i \Delta p_k}$. Для вычисления же $\overline{\Delta p_i}$ необходимо второе приближение, которое, как нетрудно видеть, имеет вид

$$\Delta p_i^{(2)} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{\partial H_2(p^0,\ \vartheta^0,\ t)}{\partial \vartheta_i^0} + \\ + \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \frac{\partial^2 H_1(p^0,\ \vartheta^0,\ t)}{\partial \vartheta_i^0 \partial p_k^0} \cdot \frac{\partial H_1(p^0,\ \vartheta^0,\ t)}{\partial \vartheta_k^0} - \\ - \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \frac{\partial^2 H_1(p^0,\ \vartheta^0,\ t)}{\partial \vartheta_i^0 \partial \vartheta_k^0} \frac{\partial H_1(p^0,\ \vartheta^0,\ t)}{\partial p_k^0} + \\ + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k^0 \partial p_e^0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{t} dt' (t - t') \frac{\partial^2 H_1(p^0,\ \vartheta^0,\ t)}{\partial \vartheta_i^0 \partial \vartheta_e^0} \cdot \frac{\partial H_1(p^0,\ \vartheta^0,\ t)}{\partial p_k^0}. \tag{3.5}$$

Если столкновения редки, то вероятность $W$ не зависит от переменных $a_i$, так как для частицы с заданным значением импульсов $p_i$ все значения $\vartheta_i$ (а следовательно, $a_i$) равновероятны. В этом случае вероятность $W$ нахождений средних величин можно выносить за знак интеграла по $a_i$.

Теперь $W(p, \alpha_\mu)$ имеет смысл вероятности столкновения в единицу времени частицы с импульсом $p$ с внешней частицей с параметрами $\alpha_\mu$ (с любым исходом столкновений). Будем ее просто называть вероятностью столкновения *. Во всех конкретных случаях она легко находится из физических соображений.

---

* Эта вероятность нормирована только на $\alpha_\mu$, но не на $da$, и поэтому отличается от ранее введенной вероятности $W(p, \alpha, a)$ множителем $\tau_a$ [см. (3.7)]. Мы по-прежнему обозначаем ее той же буквой, так как в дальнейшем будем иметь дело только с этой вероятностью.

Средние значения $\overline{\Delta p_i \Delta p_k}$ и $\overline{\Delta p_i}$ могут быть записаны в виде

$$\overline{\Delta p_i \Delta p_k} = \int n(\alpha_\mu) W(p, \alpha_\mu) \langle \Delta p_i \Delta p_k \rangle d\alpha;$$

$$\overline{\Delta p_i} = \int n(\alpha_\mu) W(p, \alpha_\mu) \langle \Delta p_i \rangle d\alpha, \tag{3.6}$$

где $\langle \Delta p_i \rangle = \frac{1}{\tau_a} \int d^3a \Delta p_i(p, a, \alpha)$;

$$\langle \Delta p_i \Delta p_k \rangle = \frac{1}{\tau_a} \int d^3a \Delta p_i(p, a, \alpha) \Delta p_k(p, a, \alpha) \tag{3.7}$$

$$\tau_a = \int d^3a$$

и являются функциями $p$ и $\alpha$.

Среднеквадратичные $\langle \Delta p_i \Delta p_k \rangle$ находятся из первого приближения (3.4)

$$\langle \Delta p_i \Delta p_k \rangle = \frac{1}{\tau_a} \int d^3a \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\partial H_1(p_0, a + \omega t, t)}{\partial a_i} \times$$

$$\times \frac{\partial H_1(p_0; a + \omega t; t')}{\partial a_k}, \tag{3.8}$$

а $\langle \Delta p_i \rangle$ в первом приближении обращается в нуль, так как (3.4) фактически представляет собой полную производную по $a_i$ и, следовательно, исчезает при интегрировании по $a_i$. Непосредственное вычисление $\langle \Delta p_i \rangle$ во втором приближении очень громоздко, однако $\langle \Delta p_i \rangle$ могут быть выражены через квадратичные величины $\langle \Delta p_i \Delta p_k \rangle$. Для этого выберем в качестве $p_i$ не произвольные интегралы движения, а переменные действия $I_i$, которые отличаются от других интегралов движения также и тем, что пределы изменения сопряженных им координат не зависят от импульсов $I_i$, и поэтому можно менять порядок интегрирования по $a_i$ и дифференцирования по $I_i$ [заметим, что теперь $\tau_a = (2\pi)^3$].

Рассмотрим сначала случай движения, финитного во всех направлениях. В этом случае при изменении угловых переменных на $2\pi$ частица оказывается в том же самом состоянии; следовательно, все физические величины периодичны по всем $\vartheta$ с периодом $2\pi$.

Тогда первый член в (3.5) при интегрировании по $a_i$ исчезает, вследствие периодичности, как интеграл от производной по $a_i$, так что $H_2$ не входит в $\langle \Delta I_i \rangle$.

Третий член проинтегрируем по частям $a_k$, объединяя его со вторым, получим для этих членов

$$\frac{1}{\tau_a}\int d^3a \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \left\{ \frac{\partial^2 H_1\left(I_i^0;\ a+\omega t;\ t\right)}{\partial a_i \delta I_k^0} \cdot \frac{\partial H_1\left(I_i^0;\ \ a+\omega t';\ t'\right)}{\partial a_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial H_1\left(I_i^0;\ a+\omega t;\ t\right)}{\partial a_i} \frac{\partial^2 H_1\left(I_i^0;\ \ a+\omega t';\ t\right)}{\partial a_k \delta I_k^0} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\tau_a}\int d^3a \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \frac{\delta}{\delta I_k}\left[\frac{\partial H_1}{\partial a_i}\frac{\partial H_1}{\partial a_k}\right], \qquad (3.9)$$

где $\frac{\delta}{\delta I_k}$ надо понимать как производную только по первому аргументу, в то время как «полная» производная по $I_k$ равна

$$\frac{\partial}{\partial I_k}\psi\left(I_i^0;\ a+\omega t,\ t\right) = \frac{\delta\delta}{\delta I_k} + \frac{\delta\omega_e}{\partial I_k}\frac{\partial\delta}{\partial\omega_e}. \qquad (3.10)$$

В четвертом члене в (3.5) слагаемое, содержащее $t'$, интегрируем по частям, после чего он примет вид

$$\frac{1}{\tau_a}\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_k \partial I_e}\int d^3a \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \left\{ t\frac{\partial^2 H_1\left(I_i^0;\ a+\omega t,\ t\right)}{\partial a_i \partial a_e}\frac{\partial H_1}{\partial a_e} + \right.$$

$$\left. + t'\frac{\partial H_1}{\partial a_i}\frac{\partial^2 H_1\left(I_i^0;\ a+\omega t,\ t\right)}{\partial a_k \partial a_e} \right\}, \qquad (3.11)$$

и поскольку $\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_k \partial I_e} = \frac{\partial \omega_e}{\partial I_k}$,

а $$t\frac{\partial H_1\left(I_i^0;\ a+\omega t,\ t\right)}{\partial a_e} = \frac{\partial H_1\left(I_i^0;\ a+\omega t,\ t\right)}{\partial \omega_e};\quad t'\frac{\partial H_1}{\partial a_e} = \frac{\partial H_1}{\partial \omega_e},$$

то (3.11) можно записать в виде

$$\frac{1}{\tau_a}\int d^3a \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \frac{\partial \omega_e}{\partial I_k}\frac{\partial}{\partial \omega_e}\left\{\frac{\partial H_1}{\partial a_i}\frac{\partial H_1}{\partial a_k}\right\}. \qquad (3.12)$$

(«Поверхностные» интегралы в (3.9) и (3.11) исчезнут вследствие периодичности).

Складывая (3.9) с (3.12), получим под интегралом, согласно (3.10), полную производную по $I_k$, которую можно вынести за знак интеграла, поскольку пределы интегрирования не зависят от $I_k$.

В результате имеем

$$\langle \Delta I_i \rangle = \frac{\partial}{\partial I_k} \frac{1}{\tau_a} \int d^3a \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \times$$

$$\times \frac{\partial H_1 (I^0;\ a + \omega t;\ t)}{\partial a_i} \frac{\partial H_1 (I^0;\ a + \omega t';\ t')}{\partial a_k}. \qquad (3.13)$$

Нетрудно видеть, что полученный интеграл равен половине интеграла (3.8), так что окончательно получаем

$$\langle \Delta I_i \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I_k} \langle \Delta I_i \Delta I_k \rangle. \qquad (3.14)$$

Как уже указывалось, вероятность $W(p, \alpha)$ имеет смысл вероятности столкновения в единицу времени. Под столкновением следует понимать факт появления возмущающего поля вне зависимости от результата этого возмущения. Если возмущение производится параллельным пучком внешних частиц, то под $W$ надо понимать поток внешних частиц с заданными параметрами через область, занимаемую нашими частицами*. Совершенно ясно, что в случае финитного движения, когда средняя скорость наших частиц равна нулю, эта вероятность может зависеть только от параметров $\alpha$, характеризующих возмущение, но не от импульсов наших частиц. В случае возмущение потоком внешних частиц $W(a_i)$ пропорционально скорости налетающих частиц.

Умножая (3.14) на $n(\alpha) W(\alpha)$ и внося этот множитель в правой части под знак производной (поскольку $W$ не зависит от импульсов), после интегрирования по $\alpha$ получим искомую связь между средними и средними квадратичными отклонениями для переменных действия

$$\overline{\Delta I_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I_k} \overline{\Delta I_i \Delta I_k}. \qquad (3.15)$$

Для получения эквивалентного соотношения для произвольных интегралов движения $p_i$, к сожалению, нельзя воспользоваться тензорным законом преобразования, поскольку

---

* Под областью, занимаемой частицами, следует понимать достаточно большую область, включающую все точки пространства, из которой возмущение еще может действовать на наши частицы. Тот факт, что при этом может быть учтено много возмущений, совсем не действующих на наши частицы, не должен нас смущать, ибо для таких возмущений $\Delta p_i = 0$.

$\Delta p_i$ необходимо вычислять до второго порядка; поэтому произведем переход непосредственно

$$\overline{\Delta p_i} = \frac{\partial p_i}{\partial I_k} \cdot \overline{\Delta I_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial I_k \partial I_e} \overline{\Delta I_k \Delta I_e} *.$$

Согласно (3. 15)

$$\overline{\Delta p_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial p_i}{\partial I_k} \frac{\partial}{\partial T_e} \Delta I_k \Delta I_e + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial I_k \partial T_e} \overline{\Delta I_k \Delta I_e};$$

$$\overline{\Delta I_k \Delta I_e} = \frac{\partial I_k}{\partial p_m} \frac{\partial T_e}{\partial p_n} \overline{\Delta p_m \Delta p_n},$$

так что

$$\overline{\Delta p_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial p_m}{\partial I_e} \frac{\partial}{\partial p_m} \left[ \frac{\partial I_e}{\partial p_k} \overline{\Delta p_i \Delta p_k} \right],$$

что, как нетрудно показать, сводится к

$$\overline{\Delta p_i} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial p_k} [\sqrt{g}\ \overline{\Delta p_i \Delta p_k}], \tag{3. 16}$$

где $\sqrt{g}$ — якобиан перехода от $I_i$ к $p_i$. С учетом соотношения (3. 16) уравнение Фоккера—Планка относительно функции Ф, нормированной на элемент объема $d^3p$, принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \Phi}{dt} + \bar{z} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_i} \left[ \sqrt{g}\ \overline{\Delta p_i \Delta p_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\Phi}{\sqrt{g}} \right], \tag{3. 17}$$

где мы, как и в предыдущем параграфе, добавили в левой части член $\bar{z} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}}$.

Интересно отметить, что для функции $f = \frac{\Phi}{\sqrt{g}}$, представляющей собой функцию, нормированную на три переменных действия (и совпадающую с точностью до множителя $(2\pi)^3$ с канонической функцией распределения), получается уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\operatorname{div} j, \tag{3. 18}$$

---

* Усреднение есть инвариантная операция, поэтому соотношение между самими величинами сохраняются и для средних значений. Заметим также, что усреднение можно производить в любых координатах, в частности, $\Delta p$ и $\Delta I$ можно усреднять каждое по собственным сопряженным координатам.

где

$$j_k = -\frac{1}{2}\overline{\Delta p_k \Delta p_e}\,\frac{\partial f}{\partial p_e},$$

а $\operatorname{div} j$ следует понимать как дивергенцию в криволинейных координатах $p_i$ в пространстве, где и «элемент длины» $ds^2 = dI_1^2 + dI_2^2 + dI_3^2$ (в котором переменные действия являются декартовыми координатами).

Сравнивая уравнения (2.25) и (2.26) предыдущего параграфа с уравнением (3.17), видим, что введенный ранее тензор $R^{\alpha\beta'}$ связан с тензором $\overline{\Delta p_i \Delta p_k}$ соотношением

$$2\pi e_1^2 e_2^2 L n_2 R^{\alpha\beta'} = \frac{1}{2}\overline{\Delta p_\alpha \Delta p'_\beta}\,. \qquad (3.19)$$

Если внешние частицы не бесконечно тяжелые, то при вычислении $\Delta p_i$ надо учесть также возмущение и их движения. Это возмущение скажется только во втором приближении и должно быть учтено, поэтому, только при вычислении $\Delta p_i$. Дополнительный член, который появится при этом, может быть выражен аналогично основному члену через квадратичные

$$\Delta \check{I}_i = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I_k}\widetilde{\Delta I_i \Delta I_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I_{k'}}\widetilde{\Delta I_i \Delta I_{k'}}, \qquad (3.20)$$

где знаком $\sim$ обозначено усреднение по всем переменным, кроме импульсов налетающих частиц $I'_i$, так что

$$\Delta p_i = \int \widetilde{\Delta p_i} f'(p')\,dp',$$

где $f'(p')$ — функция распределения налетающих частиц по импульсам *.

Подставляя (3.20) в уравнение Фоккера—Планка и интегрируя второй член в (3.20) по частям, получим уравнение в переменных действия

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I_i}\int dI' \left\{\widetilde{\Delta I_i \Delta I_k} f' \frac{\partial f}{\partial I_k} + \right.$$

$$\left. + \widetilde{\Delta I_i \Delta I'_k} f \frac{\partial f'}{\partial I_k}\right\}, \qquad (3.21)$$

* Теперь уже не существует непосредственной связи $\overline{\Delta I_i}$ с $\overline{\Delta I_i \Delta I_k}$, так как $f'$ нельзя внести под производную во втором члене в (3.20).

что совпадает по форме с уравнением Ландау [2]. В произвольных же интегралах движения уравнение для функции $\Phi$, нормированной на элемент объема этих переменных, имеет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\dot{\bar{z}}\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_i}\int d^3p'\left\{\sqrt{g}\,\widetilde{\Delta p_i\Delta p_k}\,\Phi'\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\Phi}{\sqrt{g}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{g'}\widetilde{\Delta p_i\Delta p'_{k'}}\,\Phi\frac{\partial}{\partial p_{k'}}\frac{\Phi'}{\sqrt{g'}}\right\}. \qquad (3.22)$$

Заметим, что $\widetilde{\Delta p_i\Delta p_{k'}}$, вообще говоря, связаны с $\widetilde{\Delta p_i\Delta p_k}$. Эта связь особенно простая, если $p_i$ являются интегралами движения, сумма которых остается интегралом движения с учетом возмущающих полей. Для этого достаточно, чтобы возмущающие поля были функцией разности соответствующих сопряженных координат.

Для интересующей нас задачи вычисление средних квадратичных величин можно провести до конца непосредственно в переменных $w$, $u$, $v$. В этих переменных невозмущенная функция Гамильтона и возмущающий гамильтониан имеют вид [см. (2.8)].

$$H_0=\frac{1+2w+v^4}{2v^2}\,; \qquad (3.23)$$

$$H_1=\frac{e_1e_2}{R^*}\frac{v^2}{H_0-\frac{k^2r^2}{2}}\,, \qquad (3.24)$$

где $$R^*=\left\{(z_1-z_2)^2+\frac{1}{\gamma^2}\left[r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right]\right\}^{1/2}$$

(скорость налетающей частицы всюду, где это возможно положена равной единице).

В результате простых, но громоздких вычислений получим для отличных от нуля средних квадратичных отклонений

$$\overline{(\Delta w)^2}=4\pi e_1^2e_2^2Ln_2\frac{2v^4w}{1+w+v^4}\,;$$
$$\overline{\Delta w\Delta u}=4\pi e_1^2e_2^2Ln_2\frac{2v^4u}{1+w+v^4}\,; \qquad (3.25)$$
$$\overline{(\Delta u^2)}=4\pi e_1^2e_2^2Ln_2\frac{2v^2w}{k^2(1+w+v^4)}\,.$$

Сравнивая полученные выражения с (2.24), видим, что соотношение (3.19) действительно выполняется, и поэтому уравнение (3.17) с полученными значениями $\overline{\Delta p_i\Delta p_k}$ совпадает с уравнением (2.27) предыдущего параграфа.

## 4. Стабилизированный электронный пучок в стационарном состоянии

Стационарное состояние стабилизированного электронного пучка осуществляется, когда в среднем по всем электронам энергия, передаваемая электронам ионами, уносится излучением, а передаваемый импульс компенсируется специально наложенным продольным электрическим полем.

Из разных типов излучения в пучке, как показано в [3], следует учитывать некогерентное излучение, связанное с движением электронов в поле пучка.

Кроме того, следует учесть изменение продольного импульса и энергии, обусловленное продольным электрическим полем, не учтенным в (2.6).

Так как действие продольного поля и излучение представляют собой систематический, а не стохастический процесс, то в первую часть уравнения (2.27) надо добавить только линейные члены, которые можно записать в следующем виде:

$$j_i^{\text{поле}} = \Phi\left(\overline{\frac{\partial p_i}{\partial t}}\right)_{\text{поле}}, \qquad j_i^{\text{изл}} = \Phi\left(\overline{\frac{\partial p_i}{\partial t}}\right)_{\text{изл}}, \tag{4.1}$$

где усреднение производится по невозмущенному движению. Выберем в данной точке декартову систему координат с осями, направленными по $r$, $\varphi$, $z$ и, соответственно, в пространстве импульсов, как это сделано в (2.6). Перейдем к переменным $w$, $u$, $v$. Дополнительный гамильтониан, связанный с продольным электрическим полем, имеет вид

$$H_1 = -e_1 E z,$$

так что $\left(\frac{\partial p_i}{\partial t}\right)_{\text{поле}} = eE_1 \frac{\partial z}{\partial \vartheta_i}$.

Значения $\frac{\partial t}{\partial \vartheta_i}$ легко находятся, и после усреднения по невозмущенному движению получим

$$\left(\overline{\frac{dw}{\partial t}}\right)_{\text{поле}} = -eE_1 \frac{w}{2kvT}; \tag{4.2}$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\text{поле}} = -eE_1 \frac{1}{2kT};$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{\text{поле}} = 0$$

Влияние излучения не может быть, как известно, описано дополнительным гамильтонианом, однако его можно учесть введением дополнительной обобщенной силы в уравнение Гамильтона

$$p_i^0 = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_i} + F_i, \qquad (4.3)$$

причем нетрудно показать, что составляющие обобщенной силы при произвольном каноническом преобразовании получаются из декартовых составляющих $F_i^*$ по закону

$$F_i = F_k^* \frac{\partial p_i}{\partial p_k^*}, \qquad (4.4)$$

где $p_k^*$ — компоненты импульса в декартовой системе координат, т. е. $F_i$ преобразуется как контравариантный вектор в пространстве импульсов *.

Тормозящая сила излучения релятивистской частицы в четырехмерном виде равна [5]

$$F_i^* = \frac{2e^2}{3}(\delta_{ik} + u_i u_k)\frac{d^2 u_k}{ds^2}, \qquad (4.5)$$

или, выражая ускорение через тензор электромагнитного поля,

$$F_i^* = \frac{2e^3}{3}\frac{\partial H_{ik}}{\partial x_e} u_k u_e - \frac{2e^4}{3} H_{ie} H_{ke} u_k - \\ - \frac{2e^4}{3}(H_{ke} u_e)^2 u_i, \qquad (4.6)$$

откуда для трехмерной силы торможения получим **

$$\mathbf{F}^* = \frac{2e^3}{3}\gamma\left\{\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\right]\mathbf{E} + \left[\mathbf{v} \times \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\right)\mathbf{H}\right]\right\} + \\ + \frac{2e^4}{3}\{[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] + [\mathbf{H} \times [\mathbf{H} \times \mathbf{v}]] + \mathbf{E}(\mathbf{vE})\} - \\ - \frac{2e^4}{3}\gamma^2\{(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{H}])^2 - (\mathbf{E} \times \mathbf{v})^2\}\mathbf{v}. \qquad (4.7)$$

---

* Если преобразование точечное, то $F_i$ преобразуется также и как ковариантный вектор в пространстве координат. Действительно, при точечном преобразовании, как легко показать, $\frac{\partial p_i}{\partial p_k^*} = \frac{\partial \vartheta_k^*}{\partial v_i}$, т. е. $F_i = F_k^* \frac{\partial \vartheta_k^*}{\partial \vartheta_i}$.

** В формуле (4.7) исправлена ошибка, допущенная в [5] (стр. 239).

Из (4.7) после несложных выкладок находим выражение для силы торможения $F_k^*$ в выбранной декартовой системе координат $(r, \varphi, z)$. Матрица перехода $\frac{\partial p_i}{\partial p_k}$ находится с помощью (2.8) и (2.9). Тогда из (4.4) следует, что компоненты обобщенной силы в канонических переменных, где $w$, $u$ и $v$ являются импульсами, равны

$$F_w = \frac{1+2w+v^4}{2v^2} F_i^* v_i - \frac{1+2w-v^4}{2v^2} F_3^*;$$

$$F_u = rF_2^*;$$

$$F_v = \frac{1}{2v}(F_i^* v_i - F_3^*). \tag{4.8}$$

Усредняя величины $F_i^* v_i$; $F_3^*$ и $rF_2^*$ по невозмущенному движению, получим окончательно

$$\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)}_{\text{изл}} = -\frac{2e^2}{3}\frac{kv}{3}(5w^2+4w+k^2v^2u^2);$$

$$\overline{\left(\frac{du}{dt}\right)}_{\text{изл}} = -\frac{2e^2}{3}\frac{kvu}{T}(w+1); \tag{4.9}$$

$$\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)}_{\text{изл}} = -\frac{2e^2}{3}\frac{kv^2w}{2T}.$$

Добавляя в уравнение (2.27) дополнительные члены, связанные с продольным полем и излучением согласно (4.2) и (4.9), получим полное уравнение для стабилизированного электронного пучка

$$\frac{1}{4\pi e_1^2 e_2^2 L n_2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1+w-v^4}{2kv^3T}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial w^2}\left(\frac{wv}{kT}\Phi\right) +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial u \partial w}\left(\frac{uv}{kT}\Phi\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{w}{k^3vT}\Phi\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{v\Phi}{kT}\left[1+\sigma\frac{w}{v^2} - \frac{\alpha}{2}(5w^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+4w+v^2u^2k^2)\right]\right\} + 2\alpha\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{vu(w+1)}{kT}\Phi\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{v\Phi}{kT}\left(\alpha v w - \frac{\sigma}{v}\right)\right], \tag{4.10}$$

где введены два параметра

$$\alpha = \frac{k^2}{12\pi e_1^2 e_2^2 L n_2}; \quad \sigma = \frac{eE}{8\pi e_1^2 e_2^2 L n_2}. \tag{4.11}$$

В правой части уравнения (4.9) везде входит комбинация $\frac{v\Phi}{kT}$, которая с точностью до постоянного множителя $\frac{k}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}$ совпадает с канонической функцией распределения $f$, нормированной на фазовый объем. Естественно поэтому выбрать $f$ за новую неизвестную функцию. Кроме того, введем новые безразмерные переменные

$$\xi = \sqrt{\alpha} w; \quad \eta = \frac{kuv}{w}; \quad \zeta = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\sigma^2}} v. \tag{4.12}$$

В результате для функции $f$ получим следующее уравнение в новых переменных:

$$\frac{1}{4\pi e_1^2 e_2^2 L n_2} \cdot \frac{1}{\sigma^2 \xi \zeta^4} \left\{ \left( \xi + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\alpha}} \zeta^4 + \sqrt{\alpha} \right) \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \xi - \frac{\sigma^2}{\sqrt{\alpha}} \zeta^4 + \sqrt{\alpha} \right) \frac{\partial f}{\partial z} \right\} =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{1-\eta^2}{\xi^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\xi} \left( 1 + \frac{5}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \xi^2 \eta^2 - \frac{\xi}{\zeta^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \xi} +$$
$$+ \eta \left( 1 - \eta^2 - \frac{2}{\xi^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \eta} + 2\zeta \left( 1 - \frac{1}{\xi \zeta^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \zeta} +$$
$$+ 16 f + 4 \sqrt{\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{2}{\xi} f \right). \tag{4.13}$$

Единственный параметр, остающийся в правой части, равен, согласно (4.11) и (2.5)

$$\alpha = \left| \frac{e_1}{e_2} \right| \frac{1}{6L} \tag{4.14}$$

и, следовательно, много меньше единицы. Поэтому в правой части можно пренебречь членами, содержащими $\sqrt{\alpha}$. Тогда уравнение для стационарного, однородного по длине пучка в выбранных нами переменных имеет вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{1-\eta^2}{\xi^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\xi} \left( 1 + \frac{5}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \xi^2 \eta^2 - \frac{\xi}{\zeta^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \xi} +$$
$$+ \eta \left( 1 - \eta^2 - \frac{2}{\xi^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \eta} + 2\zeta \left( 1 - \frac{1}{\xi \zeta^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \zeta} + 16 f = 0. \tag{4.15}$$

Пределы изменений $w$, $u$, $v$ и $r^2$ определяются условием положительности выражения $2w - v^2 k^2 r^2 - \frac{u^2}{r^2}$, что означает условие действительности импульса $p_r$ частицы.

Область изменения $u^2$, $v$ и $w$ лежит между плоскостями $w=0$; $u^2=0$; $v=0$ и поверхностью, определяемой совпадением корней по $r$ приведенного выше выражения

$$r^2_{\text{мин}}^{\text{макс}} = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - v^2k^2u^2}}{k^2v^2},$$

т. е. поверхностью

$$w^2 - k^2v^2u^2 = 0,$$

так что переменные $w$, $u^2$, $v$ меняются в пределах

$$\begin{aligned} &0 < u^2 < \frac{w^2}{k^2v^2}; \\ &0 < v < \infty; \\ &0 < w < \infty. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Отсюда видно, что выбранные нами безразмерные переменные меняются в постоянных пределах

$$\begin{aligned} &0 < \xi < \infty; \\ &-1 < \eta < 1; \\ &0 < \zeta < \infty. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Условия, налагаемые на функцию $f$ на этих границах, следующие:

1) $f \to 0$ при $w \to \infty$;
2) $f \to 0$ при $v \to 0$ и $v \to \infty$; (4.18)
3) $f|_{\eta=1} = f|_{\eta=-1}$;
4) конечность на остальных границах.

Действительно, $w = \infty$ означает бесконечную кинетическую энергию или бесконечные радиусы частиц, $v = \infty$ означает бесконечную поперечную кинетическую энергию, а $v = 0$ соответствует тому случаю, когда бесконечна продольная кинетическая энергия.

Таким образом, ни уравнение (4.15), ни граничные условия (4.17) и (4.18) не содержат параметров и определяют некоторую универсальную функцию переменных $\xi$, $\eta$ и $\zeta$.

Плотность $n$ и поток $j_z$ находятся из функции $f$ следующим образом:

$$\begin{aligned} n(r) &= \frac{1}{r}\int f(\xi, \eta, \zeta)\,\frac{\partial(p_r; p_\varphi; p_z)}{\partial(\xi; \eta; \zeta)}\,d\xi d\eta d\zeta; \\ j_z(r) &= \frac{1}{r}\int f(\xi, \eta, \zeta)\,\frac{\partial(p_r; p_\varphi; p_z)}{\partial(\xi; \eta; \zeta)}\,\frac{p_z - \frac{k^2r^2}{2}}{H_0 - \frac{k^2r^2}{2}}\,d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Якобиан легко вычисляется. С учетом (4.12) он равен

$$\frac{\partial(p_r;\ p_\varphi;\ p_z)}{\partial(\xi;\ \eta;\ \zeta)} = \frac{2\xi}{\alpha^{1/2}\sigma^{3/2}k\zeta^4}\,\frac{2\xi + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\alpha}}\zeta^4 + \sqrt{\alpha} - \zeta^2\sigma k^2 r^2}{\sqrt{2\xi - \zeta^2\sigma k^2 r^2 - \frac{\xi^2\eta^2}{\zeta^2}\frac{1}{\sigma k^2 r^2}}}. \qquad (4.20)$$

Вводя вместо $r$ новую безразмерную переменную

$$x = \sqrt{\sigma}\,kr \qquad (4.21)$$

и пренебрегая величиной $\sqrt{\alpha}$ по сравнению с единицей, приведем (4.19) к виду

$$n(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\alpha}x}\int \frac{f(\xi,\ \eta,\ \zeta)\,\xi}{\sqrt{2\xi - \zeta^2x^2 - \frac{\xi^2\eta^2}{\zeta^2x^2}}} \times$$

$$\times \frac{1}{\zeta^4}\left(2\xi + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\alpha}}\zeta^4 - \zeta^2x^2\right)d\xi d\eta d\zeta; \qquad (4.22)$$

$$j_z(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\alpha}x}\int \frac{f(\xi,\ \eta,\ \zeta)\,\xi}{\sqrt{2\xi - \zeta^2x^2 - \frac{\xi^2\eta^2}{\zeta^2x^2}}} \times$$

$$\times \frac{1}{\zeta^4}\left(2\xi - \frac{\sigma^2}{\sqrt{\alpha}}\zeta^4 - \zeta^2x^2\right)d\zeta d\xi d\eta. \qquad (4.23)$$

Как видно из (4.22) и (4.23), для нахождения плотности и потока достаточно знать только три функции одной переменной $x$, равные интегралам от трех слагаемых в (4.22) и (4.23). Это может существенно облегчить численное решение задачи.

Полученные выражения дают возможность из соображений размерности найти условия существования стационарного состояния пучка. Функция $f$ является решением уравнения, не содержащего параметров, и, следовательно, размер области, где эта функция существенно отлична от нуля, порядка единицы по всем переменным. Так как в электронной системе координат интеграл от плотности отличен от нуля, а интеграл от потока $j_z$ равен нулю, то из сравнения (4.22) и (4.23) видно, что член, содержащий $\frac{\sigma^2}{\sqrt{\alpha}}\zeta^4$, должен быть порядка остальных, что возможно только при $\frac{\sigma^2}{\sqrt{\alpha}} \sim 1$, т. е.

$$\sigma^2 \sim \sqrt{6L}. \qquad (4.24)$$

Введем далее вместо $f$ безразмерную функцию $f^* = \frac{1}{A\sigma\sqrt{\alpha}} f$ так, чтобы интеграл в (4.22) был порядка единицы. Нормировочный множитель $A$ вычисляем из условия

$$2\pi \int n(r)\, r dr = \frac{2\pi}{\sigma k^2} \int n(x)\, x dx = \frac{\nu_1}{\gamma e^2},$$

где $\nu_1$ — число электронов в лабораторной системе координат на единице длины пучка, умноженное на классический радиус электрона $r_0 \left(r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \to e^2\right)$. Отсюда получаем

$$A \sim \frac{\sigma \nu_1 k^2}{2\pi\gamma e^2}.$$

Таким образом, плотность электронов в области, где она отлична от нуля, оказывается порядка

$$n_1 \sim \frac{\sigma \nu_1 k^2}{2\pi\gamma e^2}. \qquad (4.25)$$

Так как пучок в лабораторной системе координат слабо заряжен, то плотности электронов и ионов в электронной системе координат связаны соотношением $n_1 = \frac{n_2}{\gamma^2}$, откуда получаем второе соотношение между параметрами

$$\frac{\sigma \nu_1 k^2 \gamma}{2\pi n_2 e^2} \sim 1, \quad \text{или} \quad \sigma \sim \frac{1}{\gamma \nu_1}. \qquad (4.26)$$

Используя (4.24) и (4.26) и вводя радиус пучка $r^*$, который естественно определить из условия $x^* = \sqrt{\sigma} k r^* \sim 1$, получим значение величины $\gamma$ и радиуса пучка $r^*$ как функцию числа частиц $\nu_1$ и внешнего поля $E$ в стационарном состоянии стабилизированного электронного пучка

$$\gamma \sim \frac{\sqrt[4]{L}}{\nu_1}; \quad r^* \sim \sqrt{\frac{4Le}{E}}. \qquad (4.27)$$

Эти значения были получены в [3] из приближенной теории (при больших $L$ $\varkappa \simeq \sqrt[4]{L}$).

## ЛИТЕРАТУРА


1. S. Chapman, T. G. Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge, 1939.
2. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, **7**, 203 (1937).
3. Г. И. Будкер, Атомная энергия **1**, № 5, 9 (1956).
4. Г. И. Будкер, С. Т. Беляев, ДАН СССР, **107**, 807 (1956).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., ГТТИ, 1948.