Доклады Академии наук СССР
1956. Том 107, № 6

ФИЗИКА

С. Т. БЕЛЯЕВ и Г. И. БУДКЕР

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ.

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 13 X 1955)

I. Трансформационные свойства функции распределения

1. Вопрос о поведении функции распределения при преобразованиях Лоренца рассматривался в ([1]), где исходным являлось предположение об инвариантности числа частиц в заданном элементе фазового объема. В действительности, однако, эта величина не является инвариантом (как, между прочим, не является инвариантом произведение обычной плотности на трехмерный объем), поскольку в разных системах координат одновременно находящимися в данном объеме будут считаться разные частицы *.

Обычная функция распределения, зависящая от 4 координат и 3 импульсов, не имеет релятивистски-инвариантного вида. В ([2]) введена функция 4-координат и 4-импульсов, нормированная на 8-мерный объем, в том числе на интервал времени, вследствие чего физический смысл этой функции становится совершенно неясным.

Таким образом, вопрос о релятивистски-инвариантной записи кинетического уравнения и трансформационных свойствах функции распределения нельзя считать выясненным.

2. Релятивистски-инвариантная запись распределения частиц в пространстве координат и импульсов может быть произведена при помощи вектора F_k, зависящего от четырех координат x_k и четырех импульсов p_k, такого, что $\int F_k d^4p = j_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, где j_k — обычный 4-вектор потока и плотности частиц.

Нетрудно видеть, что четвертая компонента этого вектора представляет собой функцию распределения, зависящую от 8 переменных и имеющую смысл числа частиц, находящихся в данный момент времени в единице 3-объема пространственных координат и 4-объема импульсов. Остальные три компоненты имеют смысл вектора тока в фазовом пространстве.

Вектор F_k параллелен 4-скорости частиц $u_k(x, p)$, ибо каждая частица дает вклад в поток в направлении своей скорости $F_k = Fu_k$. Скаляр $F(x, p)$ будем называть скалярной функцией распределения, хотя он и не имеет смысла плотности частиц в каком-либо пространстве.

Введенные функции кроме релятивистски-инвариантного вида отличаются еще тем, что могут описывать систему частиц с различными (вообще говоря, непрерывно распределенными) значениями масс покоя. Если массы покоя всех частиц одинаковы, то функция F содержит δ-функцию $F(x, p) = icf(x, p)\,\delta\left(\sqrt{-\left(p_l - \frac{e}{c}A_l\right)^2} - mc\right)$. Скаляр $f(x, p)$, который из-за наличия δ-функции можно рассматривать как функцию 3 (а не 4)

* Число частиц в объеме является инвариантом, вообще говоря, только в том случае, когда частицы не пересекают границ объема.

импульсов, совпадает с обычной функцией распределения (что нетрудно показать из определения F). Таким образом, обычная функция распределения f инвариантна относительно преобразования Лоренца *.

3. Будем пользоваться инвариантно записанными уравнениями Гамильтона:

$$\frac{dp_k}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k}; \quad u_k \equiv \frac{dx_k}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}; \quad \mathcal{H}(x, p) = -\sqrt{-\left(p_l - \frac{e}{c} A_l\right)^2}. \tag{1}$$

Согласно закону сохранения числа частиц и физическому смыслу F_4 имеем:

$$\frac{\partial F_4}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{dx_\alpha}{dt} F_4\right) + \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{dp_k}{dt} F_4\right) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Подставляя $F_4 = Fu_4$ и пользуясь (1), получим релятивистски-инвариантное уравнение для функции F, описывающее систему невзаимодействующих частиц в электромагнитном поле

$$[\mathcal{H}F] \equiv u_k \frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial p_k} = 0. \tag{3}$$

II. Кинетическое уравнение при кулоновском взаимодействии

1. Соответствующее уравнение в нерелятивистском случае получено Л. Д. Ландау ([3]). Аналогичное уравнение может быть получено и в релятивистском случае, если энергия частиц $E \ll \sqrt{137\,L}\,mc^2$, где L — кулоновский логарифм. При больших энергиях определяющую роль играют тормозное излучение и образование пар.

Используя малость отклонений при кулоновских столкновениях, можно написать для F_4 уравнение типа Фоккера — Планка в симметричной форме, предложенной в ([3]):

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial F_4}{\partial t} + \frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{dx_\alpha}{dt} F_4\right) + \frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{dp_k}{dt} F_4\right) = -\frac{\partial J_k}{\partial p_k}, \tag{4}$$

где

$$J_k(p) = \frac{1}{(ic)^2}\int d^4p' \left(F_4 \frac{\partial F_4'}{\partial p_k'} - F_4' \frac{\partial F_4}{\partial p_k}\right) \frac{\Delta_i \Delta_k}{2} w(p, p', \Delta, \Delta')\, d\tau_\Delta \qquad (d\tau_\Delta = d^4\Delta d^4\Delta'), \tag{5}$$

$\Delta_i \equiv \Delta p_i$; $\Delta_i' \equiv \Delta p_i'$ — изменения импульсов при столкновении и $w(p, p', \Delta, \Delta')$ — вероятность такого изменения. При этом мы считали внешние поля не очень сильными, так что их влиянием на акт соударения можно пренебречь.

Средние отклонения $\int \Delta_i \Delta_k w\, d\tau_\Delta$ легко вычислить в системе координат, где нештрихованная частица покоится: $u_i = (0, 0, 0, i)$, а штрихованная движется вдоль оси x_1: $u_i' = \left(\frac{v'\gamma'}{c}, 0, 0, i\gamma'\right)$; $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$. В этой системе выражение, стоящее в (5) под интегралом по d^4p' (которое, как легко видеть, является 4-вектором), оказывается равным

---

* В отличие от результата, полученного в ([1]), где f в разных системах отличается множителем, зависящим от скоростей.

$$i_1 = i_4 = 0, \quad i_2 = -\frac{2\pi e^2 e'^2 L}{v' c^2}\left(F_4 \frac{\partial F_4'}{\partial p_2'} - F_4' \frac{\partial F_4}{\partial p_2}\right),$$
$$i_3 = -\frac{2\pi e^2 e'^2 L}{v' c^2}\left(F_4 \frac{\partial F_4'}{\partial p_3'} - F_4' \frac{\partial F_4}{\partial p_3}\right), \tag{6}$$

что при помощи векторов u_i, u_i' и скаляра F может быть записано в инвариантном виде:

$$i_i = \frac{2\pi e^2 e'^2 L}{c^2} W_{ik}\left(F \frac{\partial F'}{\partial p_k'} - F' \frac{\partial F}{\partial p_k}\right), \tag{7}$$

где

$$W_{ik} = \frac{(u_l u_l')^2}{c\,[(u_l u_l')^2 - 1]^{3/2}}\{[(u_l u_l')^2 - 1]\,\delta_{ik} - u_i u_k - u_i' u_k' - u_l u_l'(u_i u_k' + u_i' u_k)\},$$
$$u_i(p, x) = \partial \mathcal{H}(p, x)/\partial p_i = -[p_i - \frac{e}{c} A_i(x)]/\mathcal{H}(p, x). \tag{8}$$

В результате инвариантная форма кинетического уравнения для релятивистского газа имеет вид

$$[\mathcal{H}F] = -\frac{\partial J_k}{\partial p_k}; \quad J_k = \frac{2\pi e^2 e'^2 L}{c^2}\int d^4 p' W_{kl}\left(F \frac{\partial F'}{\partial p_l'} - F' \frac{\partial F}{\partial p_l}\right). \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что функция $F^0 = \chi(\mathcal{H}(p, x))\exp(p_k q_k)$, где χ — произвольная скалярная функция, а q_k — произвольный вектор, тождественно обращает в нуль правую часть уравнения (9). Функция F^0 является инвариантной записью максвелловского распределения с произвольными температурой $\theta = c(-q_k^2)^{-1/2}$ и гидродинамической скоростью $v_\alpha^0 = ic q_\alpha / q_4$ и произвольным распределением частиц по массам $\chi(mc)$.

2. Из (9) можно получить релятивистское уравнение для обычной функции f, которое, однако, не имеет релятивистски-инвариантной формы:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [Hf] = -\frac{\partial j_\alpha}{\partial p_\alpha}; \quad j_\alpha = 2\pi e^2 e'^2 L \int d^2 p \frac{W_{\alpha\beta}}{\gamma\gamma'}\left(f \frac{\partial f'}{\partial p_\beta'} - f' \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right), \tag{10}$$

где теперь H — обычная функция Гамильтона;

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\gamma^2\gamma'^2(1 - \beta_\sigma\beta_\sigma')^2}{c\,[\gamma^2\gamma'^2(1 - \beta_\sigma\beta_\sigma')^2 - 1]^{3/2}}\{[\gamma^2\gamma'^2(1 - \beta_\sigma\beta_\sigma')^2 - 1]\,\delta_{\alpha\beta} - \gamma^2\beta_\alpha\beta_\beta -$$
$$\gamma'^2\beta_\alpha'\beta_\beta' + \gamma^2\gamma'^2(1 - \beta_\sigma\beta_\sigma')(\beta_\alpha\beta_\beta' + \beta_\alpha'\beta_\beta)\}. \tag{11}$$

($c\beta_\alpha(p, x)$; $c\beta_\alpha'(p', x')$ — скорости частиц, выраженные через импульсы).

Уравнение (10) отличается от соответствующего уравнения Ландау [3] только видом величин $W_{\alpha\beta}$, которые теперь уже не являются функциями только разности скоростей.

III. Передача энергии и импульса от одного газа к другому

1. Умножая уравнение (9) на p_i и интегрируя по 4-объему импульсов определенной группы частиц, получим после несложных преобразований: $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - \frac{e}{c} F_{ik} j_k = I_i$, где $T_{ik} = \int \mathcal{H} u_i u_k F\, d^4 p$ — тензор кинетической энергии и импульса этой группы частиц; F_{ik} — тензор электромагнитного поля. 4-вектор $I_i = \int J_i d^4 p$ представляет собой плотность силы и работы, связанной со столкновениями. Согласно (9)

$$I_i = \frac{2\pi e^2 e'^2 L}{c^2}\int d^4 p\, d^4 p' W_{ik}\left(F \frac{\partial F'}{\partial p_k'} - F' \frac{\partial F}{\partial p_k}\right) \tag{12}$$

(интегралы по p' и p можно брать только по разным частицам, так как по одним и тем же частицам интеграл тождественно равен нулю). (12) представляет собой поток энергии и импульса (в единицу собственного времени системы центра инерции нештрихованных частиц), протекающий к нештрихованной группе частиц от столкновений со штрихованными.

2. Подставляя в (12) функцию распределения ионов F' в виде $F' = icn'\delta(p_1' - Mc\beta_0\gamma_0)\,\delta(p_2')\,\delta(p_3')\,\delta(\mathcal{H}' + Mc)$, где n, M, $\beta_0 c$ — соответственно плотность, масса и упорядоченная скорость ионов, найдем передачу энергии и импульса от прямолинейного пучка монохроматических релятивистских ионов покоящемуся релятивистскому электронному газу. Производя интегрирование по p' и углам электронных импульсов, получим в зависимости от абсолютного значения скорости электронов при нерелятивистских скоростях

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{4\pi e^2 e'^2 Lnn'}{mc^2\beta_0^2}\left(1 + \frac{m}{M\gamma_0}\right), \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{4\pi e^2 e'^2 Lnn'}{mc\beta_0} \qquad (\beta < \beta_0);$$
$$\frac{dp}{dt} = 0, \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{4\pi e^2 e'^2 Lnn'}{mc\beta} \qquad (\beta > \beta_0), \tag{13}$$

а при релятивистских скоростях

$$\frac{dp}{dt} = \frac{4\pi e^2 e'^2 Lnn'}{mc^2\gamma\beta_0^2}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{4\pi e^2 e'^2 Lnn'}{mc}\left(\frac{1}{\beta_0\gamma} - \frac{m}{M\beta\gamma_0}\right). \tag{14}$$

Наличие скачка при $\beta = \beta_0$ в нерелятивистской области, а также тот факт, что ионы с упорядоченной скоростью $c\beta_0$ не передают импульса покоящемуся электронному газу при $\beta_0 < \beta$, является интересным следствием кулоновского закона столкновений. Для релятивистских скоростей скачок практически пропадает ($\sim 1/\gamma_0^2$).

Подставляя для электронов релятивистское максвелловское распределение и интегрируя по абсолютной величине скорости электронов, получим ($m/M \ll 1$)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\beta_0 c}\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{4\pi e^2 e'^2 Lnn'}{\beta_0^2}\,\frac{K_1(mc^2/\theta)}{\theta K(mc^2/\theta) + mc^2 K_0(mc^2/\theta)}, \tag{15}$$

где K_0 и K_1 — функции Макдональда.

3. Подставляя в (12)

$$F = icAn\exp\left(\frac{icp_4}{\theta}\right)\delta(\mathcal{H} + Mc); \quad F' = icA'n'\exp\left(\frac{icp_4'}{\theta'}\right)\delta(\mathcal{H} + mc), \tag{16}$$

получим передачу энергии от одного газа к другому (каждый газ находится в термодинамическом равновесии при температуре, отличной от температуры другого газа). После интегрирования по частям получаем

$$I_4 = \frac{2\pi e^2 e'^2 Lnn'}{ic}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta'}\right)\int d^4p\, d^4p' FF' W_{44}. \tag{17}$$

Усредняя W_{44} по нерелятивистскому максвелловскому распределению ионов и релятивистскому электронов, находим в этом случае

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{4\pi e^2 e'^2 Lnn'}{Mc\theta'}\,\frac{1 + 2\frac{mc^2}{\theta'} + 2\left(\frac{mc^2}{\theta'}\right)^2}{\frac{2\theta'}{mc^2}K_1\left(\frac{mc^2}{\theta'}\right) + K_0\left(\frac{mc^2}{\theta'}\right)}(\theta' - \theta). \tag{18}$$

Поступило
9 VIII 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Власов, Теория многих частиц, 1950. [2] Ю. Л. Климонтович, ДАН, 87, 927 (1952). [3] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 7, в. 2, 203 (1937).